

1. Lipunmyyntipisteen avautuessa jonossa valmiina olevien asiakkaiden lukumäärä N noudattaa jakaumaa $P\{N = i\} = (1 - \rho)\rho^{i-1}$, $i = 1, \dots$. Kunkin asiakkaan palvelun aikana jonoon ennättää saapua uusia asiakkaita satunnainen määrä, joka noudattaa jakaumaa $P\{X = i\} = (1 - p)p^i$, $i = 0, \dots$. Merkitään Y :llä uusien asiakkaiden lukumäärää, jotka ovat saapuneet jonon tyhjentyessä alkuperäisistä asiakkaistaan, ts. paikalla olevien asiakkaiden lukumäärää juuri kun viimeinen ennen avautumista paikalla ollut asiakas on palveltu. Selvitä Y :n jakauma. Huomaa ero jakaumien määrittelyssä, $N \geq 1$ ja $X \geq 0$.
2. Olkoot X_1, \dots, X_n ($n \geq 2$) joukko riippumattomia $\text{Exp}(\lambda)$ -jakautuneita satunnaismuuttujia. Määritellään uusi satunnaismuuttuja R , ns. alue, seuraavasti:

$$R = \max(X_1, \dots, X_n) - \min(X_1, \dots, X_n)$$

Päättele, että R :n kertymäfunktio on $P\{R \leq x\} = (1 - e^{-\lambda x})^{n-1}$.

3. Modeemipooliin saapuu soittoja eksponentiaalisesti jakautunein väliajoin keskimääräisen väliajan ollessa 15 s. Mikä on todennäköisyys sille, että satunnaisesti valitusta alkuhetkestä laskettuna kolmannen soiton saapumiseen kuluu enemmän kuin 30 s?
4. Asiakkaan A saapuessa pankkiin kaikki neljä palvelupistettä ovat varattuina mutta jonossa ei ole muita asiakkaita. Asiakkaiden toisistaan riippumattomat palveluajat oletetaan eksponentiaalisesti jakautuneiksi keskiarvon ollessa 1 min.
 - a) Olettaen että uusia asiakkaita ei saavu, mikä on todennäköisyys sille, että A poistuu pankista viimeisenä? Muuttuisiko tulos, jos A:n edellä on jonoa, jota palvellaan saapumisjärjestyksessä?
 - b) Mikä on A:n pankissa viettämän ajan odotusarvo?
 - c) Kauanko keskimäärin kuluu aikaa A:n saapumisesta viimeisen asiakkaan poistumiseen, kun uusia asiakkaita ei saavu A:n jälkeen?
5. Markovin ketjulla (tilat $1, \dots, 4$) on seuraava siirtymätodennäköisyysmatriisi:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-p & 0 & p & 0 \\ q & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & p \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Mikä on q :n arvon oltava?
 - b) Piirrä järjestelmän tilakaavio ja luokittele ketjun tilat eri tyyppeihin.
 - c) Mikä on todennäköisyys sille, että ketju on neljännellä askeleella tilassa 4 olettaen, että askeleella 2 se oli tilassa 2?
6. Tarkastellaan jälleen ensimmäisten laskuharjoitusten tehtävää 1. Epäluotettava tietoliikenneyhteys muodostuu neljästä peräkkäisestä linkistä. Jokaisella linkillä todennäköisyys sille, että linkille lähetetty bitti (0 tai 1) vastaanotetaan linkin toisessa päässä virheettömästi, on 90 % ja siis 10 %:n todennäköisyydellä vastaanotettu bitti on muuttunut toiseksi. Mallinna bitin tilan muuttumista Markov-ketjulla ja laske sen avulla todennäköisyys sille, että koko yhteyden läpi kulkenut bitti saapuu perille virheettömästi?