TEKNILLINEN KORKEAKOULU | **Laskuharjoitus 3**
Tietoverkkolaboratorio | 22.11.2005
S-38.3143 Jonoteoria, sl-2005 | Virtamo / Koskinen

1. Syntymä-kuolema-prosessi, $\mu_n = n\mu$, ja $\lambda_n = n\lambda + \theta$, kuvaa populaation kokoa tilanteessa, missä uusia yksilöitä sekä syntyy että muuttaa alueelle jostain muualta. Olkoon populaation koko alkutilanteessa x_0, eli $X(0) = x_0$, ja $m(t)$ populaation koon odotusarvo hetkellä t, $m(t) = \mathrm{E}\left[X(t)\right]$. Ratkaise $m(t)$.

   Ohje: Mikä on $X(t+h)$:n odotusarvo ehdollistettuna $X(t)$:hen, $\mathrm{E}\left[X(t+h)|X(t)\right]$, kun h on pieni? Ottamalla odotusarvo yhtälön molemmilta puolilta (ketjusääntö) ja antamalla h lähestyä nollaa saat differentiaaliyhtälön, josta voit ratkaista $m(t)$:n.

2. Olkoon $N(t)$, $t \geq 0$, Poisson-prosessi intensiteetillä λ. Merkitään S_n:llä hetkeä, jolloin n:s tapahtuma esiintyy. Määrää

   a) $\mathrm{E}\left[S_4\right]$
   b) $\mathrm{E}\left[S_4|N(1) = 2\right]$
   c) $\mathrm{E}\left[N(4) - N(2)|N(1) = 3\right]$

3. Kaupan ovessa on liukuovi. Oven avautumiseen siitä, kun asiakas saapuu suljetun oven eteen, kuluu S sekuntia. Tänä aikana oven eteen muodostuu jonoa. Kun ovi on auennut, menevät jonoon kertyneet asiakkaat ovesta yhtäaikaa. Oven sulkeva ajastin nollautuu aina, kun asiakas kulkee ovesta, ja ovi sulkeutuu, jos T sekuntiin ei asiakkaita ole saapunut. Sekä S and T ovat siis vakioita. Asiakkaiden saapumisten väliajat noudattavat Exp(λ)-jakautumaa.

   a) Mikä on yhdellä avauksella ovesta kulkevien asiakkaiden keskimääräinen lkm.?
   b) Millä todennäköisyydellä asiakas joutuu jonottamaan?

4. Palvelimeen saapuu palvelupyyntöjä Poisson-prosessin mukaisesti intensiteetillä λ. Jos palvelin ylikuormittuu, sen läpäisy romahtaa. Tämän estämiseksi palvelimessa sovelletaan välistykseen (gapping) perustuvaa ruuhkanhallintaa, jossa jokaisen sisäänotetun pyynnön jälkeen pidetään T:n kestoinen tauko, jolloin uusia palvelupyyntöjä ei oteta vastaan. Oletetaan, että tänä aikana saapuneet ja hylätyt palvelupyynnöt eivät uusiudu. Mikä on hyväksyttyjen palvelupyyntöjen nopeus? Mikä se on erityisesti rajoilla, joissa T on joko hyvin pieni tai T on hyvin suuri?

5. On havaittu, että Poisson-prosessista on välille $(0, t)$ osunut yksi saapuminen, $N(0, t) = 1$. Osoita, että tähän tietoon ehdollistettuna saapumishetki τ on tasanjakautunut kyseisellä välillä. Ohje: Laske saapumishetken τ ehdollinen kertymäfunktio $\mathrm{P}\{\tau \leq s \mid$ yksi saapuminen välillä $(0, t)\}$

6. Asiakkaita saapuu jonoon Poisson-prosessin mukaisesti intensiteetillä λ. Olkoon satunnaisesti valitun asiakkaan palveluaika X ja tämän tiheysfunktion Laplace-muunnos $X^*(s)$. Tarkastellaan palveluajan X kuluessa jonoon saapuneiden uusien asiakkaiden lukumäärää N.

   a) Johda N:n generoiva funktio $N(z)$ ehdollistamalla laskenta X:n arvoihin, $N(z) = \mathrm{E}\left[z^N\right] = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[z^N|X\right]\right]$.

   b) Sovella edellisen kohdan tulosta tapaukseen $X \sim$ Exp(μ). Osoita, että N:n jakautuma on geometrinen.

   c) Johda sama tulos päättelemällä. Ohje: Mikä on todennäköisyys, että seuraava tapahtuma on i) uuden asiakkaan saapuminen ii) palvelun päättyminen ?