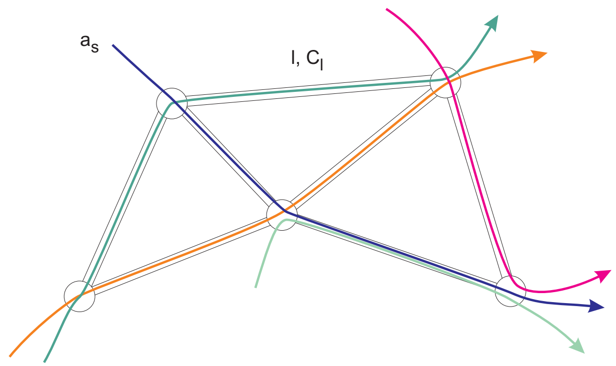
ESTON LASKENTA VERKOSSA

Erlangin funktion $E(C,a)$ avulla voidaan laskea esto yhdessä linkissä, jonka kapasiteetti on C (johtoa) ja johon tarjotun liikenteen intensiteetti on a.

Seuraavassa tarkastellaan, miten esto voidaan likimääräisesti laskea todellisessa piirikykentäisessä verkossa, joka muodostuu useista linkeistä ja jonka kautta kulkee useita eri liikennevirtoja.

$$\begin{cases} s &= \text{liikennevirta} \\ \ell &= \text{linkki, } C_\ell \text{ johtoa} \\ R_s &= \text{virran } s \text{ reitti (joukko linkkejä)} \\ a_s &= \text{virran } s \text{ tarjottu liikenneintensiteetti} \\ A_\ell &= \text{linkkiin } \ell \text{ tarjottu liikenneintensiteetti} \\ B_s &= \text{virran } s \text{ kokema esto} \\ b_\ell &= \text{esto linkissä } \ell \end{cases}$$



Merkitään lisäksi $\ell \in R_s$ kun linkki ℓ kuluu virran s käyttämään reittiin.

Tehtävänä on siis laskea estot B_s eri liikennevirroille s.

Jos estot ovat pieniä, pätee likimäärin $\boxed{B_s = \sum_{\ell \in R_s} b_\ell}$

Jos linkkiestot ovat riippumattomia, pätee $\boxed{1 - B_s = \prod_{\ell \in R_s} (1 - b_\ell)}$

Kysymys on, miten lasketaan linkkiestot b_ℓ.

Vähennetyn kuorman approksimaatio (reduced load approximation)

Tunnetaan myös nimellä Erlangin kiintopistemenetelmä (Erlang's fixed point method).

Estojen ollessa pieniä linkille ℓ tarjotun liikenteen intensiteetti on likimain

$$A_\ell = \underbrace{\sum_{s:\,\ell\in R_s} a_s}_{\substack{\text{summa niiden virtojen yli,}\\ \text{jotka kulkevat linkin } \ell \text{ kautta}}}, \qquad b_\ell = E(C_\ell, A_\ell)$$

Jos estot eivät ole pieniä, täytyy ottaa huomioon liikenteen <u>oheneminen</u> muissa linkeissä koetun eston vuoksi.

$$\begin{cases} a_s^\ell & \text{virran } s \text{ linkkiin } \ell \text{ tarjoama ohennettu liikenne} \\ A_\ell = \sum_{s:\,\ell\in R_s} a_s^\ell & \text{linkkiin } \ell \text{ tarjottujen ohennettujen liikenneintensiteettien summa} \end{cases}$$

$$a_s^\ell = \begin{cases} 0, & \text{jos } \ell \notin R_s \\ a_s \cdot \underbrace{\prod_{k\in R_s-\{\ell\}} (1-b_k)}_{\text{ohennustekijä muissa linkeissä}} = a_s \cdot \dfrac{1}{1-b_\ell} \prod_{k\in R_s} (1-b_k), & \text{jos } \ell \in R_s \end{cases}$$

Vähennetyn kuorman approksimaatio (jatkoa)

Linkin ℓ esto voidaan nyt kirjoittaa

$$\boxed{b_\ell = E\Big(C_\ell, \sum_{s:\,\ell\in R_s} a_s \frac{1}{1-b_\ell} \prod_{k\in R_s} (1-b_k)\Big)}$$

Linkin ℓ esto riippuu estoista muissa linkeissä.

- Yhtälöryhmä linkkiestojen laskemiseksi
  - yksi yhtälö kutakin linkkiä kohti
  - yhtälöt riippuvat toisistaan
  - epälineaarinen yhtälöryhmä
- Yhtälöryhmä voidaan ratkaista iteratiivisesti
  - alkuarvaus: $b_\ell = 0,\ \forall \ell$
  - sijoitetaan oikealle puolelle
  - saadaan uudet arvot b_ℓ
  - sijoitetaan taas oikealle puolelle ja jatketaan, kunnes mikään ei enää muutu

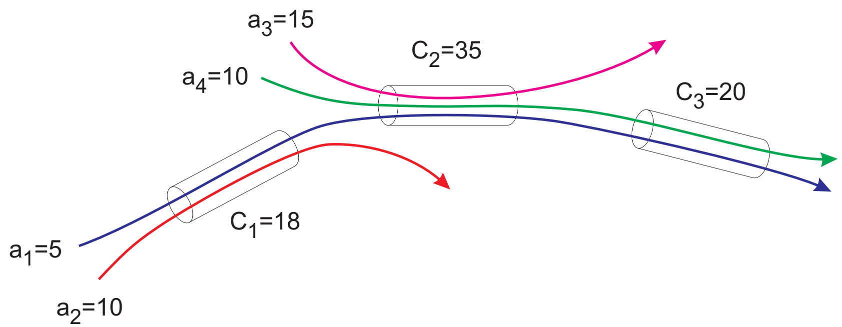
$\Rightarrow$ Erlangin kiintopistementelmä (tarkoittaa yhtälöryhmän ratkaisumenetelmää)

Kun linkkiestot b_ℓ on ratkaistu, saadaan virran s esto:

$$\boxed{B_s = 1 - \prod_{\ell\in R_s} (1-b_\ell)}$$

Esimerkki

$$\begin{cases} b_1 &= E(18,\ 5(1-b_2)(1-b_3)+10) \\ b_2 &= E(35,\ 5(1-b_1)(1-b_3)+15+10(1-b_3)) \\ b_3 &= E(20,\ 5(1-b_1)(1-b_2)+10(1-b_2)) \end{cases}$$



Alkuarvaus $b_1 = b_2 = b_3 = 0$.

Kierros	b_1	b_2	b_3
1	8.6 %	5.4 %	4.6 %
2	7.5 %	4.2 %	2.7 %
3	7.8 %	4.5 %	3.0 %
4	7.7 %	4.4 %	2.9 %
5	7.7 %	4.5 %	3.0 %
6	7.7 %	4.5 %	3.0 %

Huom. Arvot ovat vuorotellen oikean arvon ylä- ja alapuolella. Ensimmäisellä kierroksella, kun linkeille tarjotaan ohentamaton liikenne, liikenne ja sen myötä arviodut linkkiestot ovat liian suuria. Kun liian suurilla estoilla ohennetaan liikennettä, saadaan seuraavalla kierroksella liian pienet liikenteet ja vastaavasti liian pienet estot jne. Oikea arvo on aina kahden peräkkäisen approksimaation välissä.

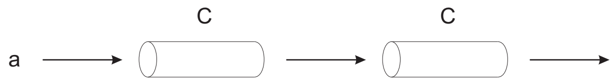
Liikennevirtojen päästä-päähän estot

$$\begin{cases} B_1 &= 1-(1-b_1)(1-b_2)(1-b_3) &= 14.4\,\% \\ B_2 &= 1-(1-b_1) &= 7.7\,\% \\ B_3 &= 1-(1-b_2) &= 4.5\,\% \\ B_4 &= 1-(1-b_2)(1-b_3) &= 7.3\,\% \end{cases}$$

Miksi kysymyksessä on approksimaatio

- Menetelmä otta huomioon vain liikenneintensiteetin ohenemisen
- Linkkiin ℓ tarjottu liikenne ei ole poissonista
  - se on tasaisempaa kuin Poisson-liikenne, koska esto muissa linkeissä leikkaa pahimmat piikit
- Estot eri linkeissä eivät ole riippumattomia.
- Approksimaatio on hyvä (asymptoottisesti tarkka), jos jokaisessa linkissä kulkee suuri määrä virtoja, joista mikään ei ole dominoiva.

Approksimaation kannalta pahimman tapauksen tilanne



- Vain yksi virta (linkit eivät ole riippumattomia!)
- Kaksi saman kapasiteetin (C) linkkiä
- Esto muodostuu tietenkin vain ensimmäisessä linkissä
  - mikä pääsee siitä läpi pääsee toisestakin

Vähennetyn kuorman approksimaatiossa estoa lasketaan kummassakin linkissä (tosin vähennetyillä kuormilla).

$$\begin{cases} b_1 = E(C, a(1-b_2)) \\ b_2 = E(C, a(1-b_1)) \end{cases}$$

Symmetrian vuoksi $b_1 = b_2 = b$,

$$\begin{cases} b = E(C, a(1-b)) \\ B = 1-(1-b)^2 = 2b - b^2 \end{cases}$$

<u>Esimerkki</u>. $a = 10$, $C = 15$

Oikea ratkaisu: $B = E(15, 10) = 3.7\,\%$

Vähennetyn kuorman menetelmä:

$b = E(15, 10(1-b)) \Rightarrow b = 3.1\,\%$

$B = 1-(1-b)^2 = 6.1\,\%$