ATM-VERKON KUTSUTASON ESTO

- Kutsutasolla tehtävän resurssivarauksen kannalta vaihtuvanopeuksinenkin lähde näyttää vakionopeuslähteeltä.
- Sen nopeus = efektiivinen kaista.
- Kutsutasolla ATM-verkkoa voidaan käsitellä *monibittinopeusverkkona*.

Tehtävänä on selvittää, millaisen eston (kutsueston) verkossa eri palvelut kokevat.

- Alussa rajoitutaan tarkastelemaan eston muodostumista yhdessä linkissä.
- Yhteyden muodostamisvaiheessa linkillä (verkon tapauksessa kaikilla reitin linkeillä) pitää olla vapaata kaistaa vähintään kyseisen lähteen efektiivisen kaistan verran,
  - ellei ole, yhteydenmuodostus estyy.
- Estotodennäköisyyden laskenta monibittinopeusverkossa muodostaa monidimensioisen yleistyksen Erlangin kaavalle.

Merkitään

- Linkin kapasiteetti on C
- Tarjottu liikenne muodostuu K:sta eri liikenneluokasta $k = 1, \ldots, K$.
- Luokan k liikennettä karakterisoivat seuraavat suureet
  - kaistanleveys b_k
  - kutsujen saapumisnopeus λ_k (oletetaan Poisson-prosessi)
  - kutsujen päättymisnopeus μ_k (oletetaan eksponentiaalinen pitoaika)
  - liikenneintensiteetti $a_k = \lambda_k / \mu_k$

Merkitään käynnissä olevien luokkaan k kuuluvien yhteyksien lukumäärää N_k:lla, $N_k = 0, 1, \ldots$.

- Tilavektori $\mathbf{N} = (N_1,\ N_2, \ldots, N_K)$ määrittelee käynnissä olevien yhteyksien joukon.
- Yksittäistä (kiinteätä) tilaa eli tila-avaruuden pistettä merkitään $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_K)$:llä.

Tila-avaruus

Linkin, jonka kapasiteetti on C, mahdollisia tilapisteitä rajoittaa ehto

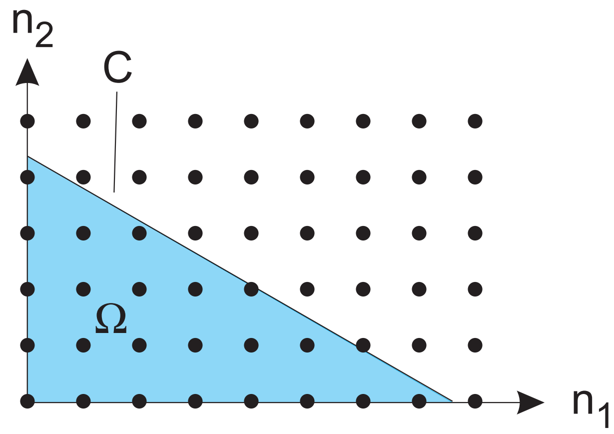
$$\sum_{k=1}^{K} n_k b_k \le C \qquad \text{eli} \qquad \boxed{\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} \le C}$$

missä on merkitty

$$\begin{cases} \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_K) \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = \sum_{k=1}^{K} n_k b_k \end{cases}$$

Linkin tila-avaruus Ω muodostuu sallituista tiloista

$$\Omega = \{\mathbf{n} : \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} \le C\}$$



Estotilat

Liikenneluokan k estotilojen joukko $\mathcal{B}_k$ muodostuu niistä sallituista tiloista, joissa ei enää ole tilaa uuden luokan k yhteyden muodostamiseen

$$\boxed{\mathcal{B}_k = \{\mathbf{n} : C - b_k < \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} \leq C\}}$$

Mitä suurempi b_k on, sitä suurempi on estotilojen joukko.

Merkitään $\mathbf{e}_k$:lla vektoria, jonka muut komponentit ovat nollia mutta k:s komponentti on ykkönen. Tämän avulla estotilojen joukko voidaan kirjoittaa

$$\boxed{\mathcal{B}_k = \{\mathbf{n} : \mathbf{n} \in \Omega,\ \mathbf{n} + \mathbf{e}_k \notin \Omega\}}$$

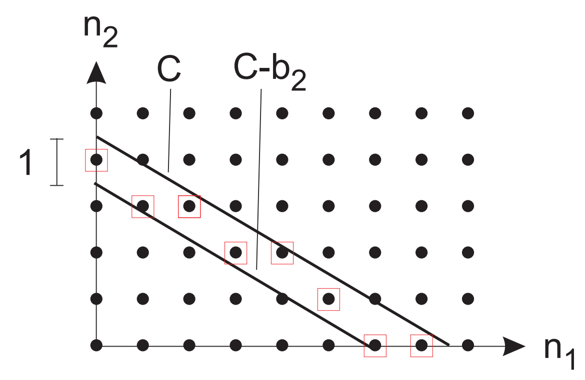
Uusi luokan k yhteys veisi systeemin sallitun alueen ulkopuolelle.

Estotilat (jatkoa)

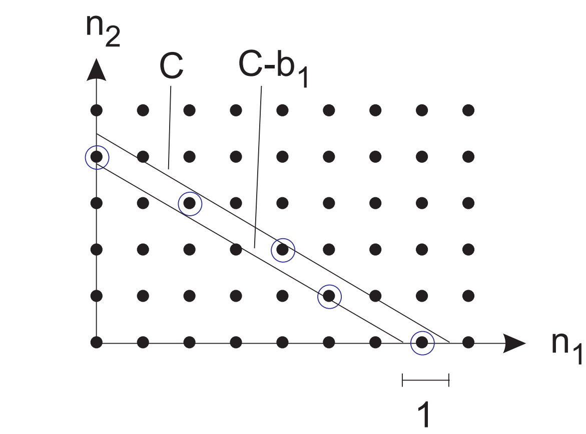
Kuvaan on merkitty luokkien 1 ja 2 estotilat.

Estotilojen joukko $\mathcal{B}_k$ voidaan kuvata seuraavasti:

- "Viimeiset tilat" k-suuntaisten sarakkeiden päissä
- Tilat, jotka jäävät kapasiteetteja C ja $C - b_k$ vastaavien suorien (hypertasojen) väliin
  - jälkimmäinen saadaan siirtämällä C-hypertasoa yksi askel k-suunnassa origoa kohti.

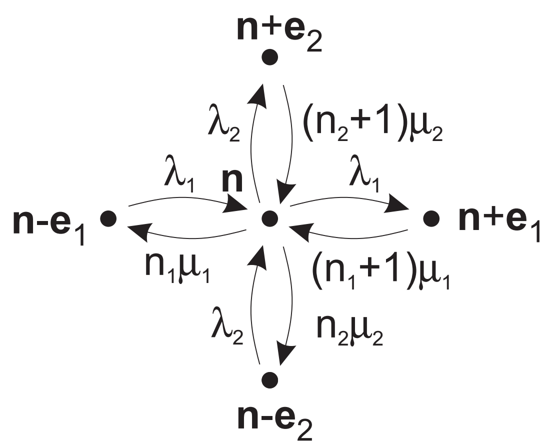


luokan 2 estotilat



luokan 1 estotilat

Tilatodennäköisyydet



Tehdyillä oletuksilla järjestelmä muodostaa Markov-prosessin

- monidimensioinen syntymä-kuolema-prosessi
- tilasiirtymät tyypillisestä sallitun alueen tilasta on esitetty kuvassa

Tasapainoyhtälöillä on tulomuotoinen ratkaisu tilatodennäköisyyksille $\pi(\mathbf{n}) = \mathrm{P}\{\mathbf{N} = \mathbf{n}\}$,

$$\boxed{\pi(\mathbf{n}) = G(\Omega)^{-1} \cdot \frac{a_1^{n_1}}{n_1!} \cdots \frac{a_K^{n_K}}{n_K!} = G(\Omega)^{-1} \cdot \prod_{k=1}^{K} \frac{a_k^{n_k}}{n_k!}}$$

missä $G(\Omega)$ on normitusvakio

$$G(\Omega) = \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} \frac{a_1^{n_1}}{n_1!} \cdots \frac{a_K^{n_K}}{n_K!}$$

Jatkossa merkitään $G(\mathcal{S})$:llä vastaavaa normittamattomien tilatodennäköisyyksien summaa (ns. tilasumma) minkä tahansa tilajoukon $\mathcal{S}$ yli.

Tulomuotoinen ratkaisu pätee, koska se toteuttaa jopa detaljibalanssiehdon, ts. todennäköisyysvirrat minkä tahansa kahden naapuritilan $\mathbf{n} - \mathbf{e}_k$ ja $\mathbf{n}$ välillä ovat tasapainossa

$$\lambda_k \pi(\mathbf{n} - \mathbf{e}_k) = n_k \mu_k \pi(\mathbf{n}) \qquad \text{sillä} \qquad \pi(\mathbf{n}) = \frac{a_k}{n_k} \pi(\mathbf{n} - \mathbf{e}_k)$$

Estotodennäköisyydet

Liikenneluokan k estotodennäköisyys B_k on todennäköisyys sille, että systeemi on jossakin luokan k estotiloista, eli tilajoukon $\mathcal{B}_k$ todennäköisyys.

$$\boxed{B_k = \sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{B}_k} \pi(\mathbf{n}) = \frac{G(\mathcal{B}_k)}{G(\Omega)}}$$

Estotodennäköisyyksien resiprookkisuus

Suoraan derivoimalla $G(\Omega)$:n lauseke, todetaan

$$\frac{\partial}{\partial a_k}G(\Omega) = \frac{\partial}{\partial a_k}\sum_{\mathbf{n}\in\Omega}\frac{a_1^{n_1}}{n_1!}\cdots\frac{a_K^{n_K}}{n_K!} = \sum_{\mathbf{n}\in\Omega}\frac{a_1^{n_1}}{n_1!}\cdots\frac{a_k^{n_k-1}}{(n_k-1)!}\cdots\frac{a_K^{n_K}}{n_K!} = \sum_{\mathbf{n}\in\Omega-\mathcal{B}_k}\frac{a_1^{n_1}}{n_1!}\cdots\frac{a_K^{n_K}}{n_K!} = G(\Omega) - G(\mathcal{B}_k)$$

Laskemalla tästä $G(\mathcal{B}_k)$ ja sijoittamalla B_k:n lausekkeeseen saadaan

$$B_k = 1 - \frac{1}{G(\Omega)}\frac{\partial}{\partial a_k}G(\Omega) = 1 - \frac{\partial}{\partial a_k}\log G(\Omega)$$

Osittaisderivoimalla seuraa

$$\frac{\partial B_j}{\partial a_i} = -\frac{\partial}{\partial a_i}\frac{\partial}{\partial a_j}\log G(\Omega) = -\frac{\partial}{\partial a_j}\frac{\partial}{\partial a_i}\log G(\Omega) = \frac{\partial B_i}{\partial a_j}$$

$$\boxed{\frac{\partial B_j}{\partial a_i} = \frac{\partial B_i}{\partial a_j}}$$

Ajassakääntyvän systeemin tila-avaruuden katkaisu

Olkoon Ω ajassakääntyvän systeemin tila-avaruus. Ajassakääntyvyys on ekvivalentti sille, että pätee detaljibalanssi

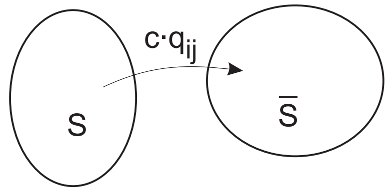
$$\pi_i q_{i,j} = \pi_j q_{j,i}, \qquad \forall i, j \in \Omega$$

Tarkastellaan modifioitua järjestelmää, jossa tila-avaruus on jaettu kahteen osaan

$$\Omega = S + \overline{S}$$

ja siirtymänopeudet ovat muuten samat kuin alkuperäisessä systeemissä paitsi, että siirtymän $i \to j$ nopeus on c-kertainen silloin, kun $i \in S$ ja $j \in \overline{S}$:

$$\begin{cases} q'_{i,j} = c\, q_{i,j}, & i \in S,\ j \in \overline{S} \\ q'_{i,j} = q_{i,j}, & \text{muulloin} \end{cases}$$



<u>Lause</u>: Modifioidun järjestelmän tasapainotilatodennäköisyydet ovat

$$\boxed{\pi'_i = \begin{cases} \dfrac{1}{G}\,\pi_i, & \text{kun } i \in S \\ \dfrac{1}{G}\,c\,\pi_i, & \text{kun } i \in \overline{S} \end{cases}}$$

missä G on normitusvakio
$G = \sum_{i \in S} \pi_i + \sum_{i \in \overline{S}} \pi_i$

Tila-avaruuden katkaisu (jatkoa)

Todistus: Lauseen mukaiset tilatodennäköisyydet π'_i toteuttavat modifioidun järjestelmän detaljibalanssiehdot

$$\pi'_i q'_{i,j} = \pi'_j q'_{j,i}, \qquad \forall i, j \in \Omega$$

Koska detaljibalanssista seuraa globaalibalanssi, toteuttavat π'_i:t modifiodun järjestelmän tasapainoehdot ja ovat siten tasapainotilan tilatodennäköisyydet.

Seuraus 1. Kun asetetaan $c = 0$ (tila-avaruuden katkaisu), nähdään että katkaistun järjestelmän (tila-avaruus S) tilatodennäköisyydet ovat normitekijää vaille samat kuin alkuperäisellä järjestelmällä

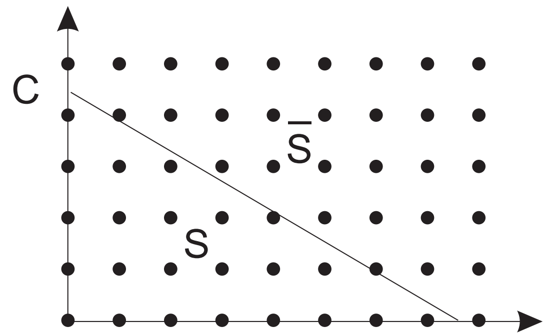
$$\pi'_i = \frac{1}{G}\pi_i, \qquad G = \sum_{i \in S} \pi_i$$

Seuraus 2. Pätee seuraavat tilatodennäköisyyksien jakaumat:

- Erlangin menetysjärjestelmä: katkaistu Poisson-jakauma
- Engsetin järjestelmä: katkaistu binomijakauma
- $M/M/1/m$-jono: katkaistu geometrinen jakauma

Tila-avaruuden katkaisu (jatkoa)

Seuraus 3. Monibittinopeusjärjestelmässä, jossa monta eri liikennevirtaa jakaa samaa kapasiteettia, tilatodennäköisyydet ovat tulomuotoiset (Poisson-jakaumien tulo).



Tulomuotoisuus pätee triviaalisti äärettömän kapasiteetin systeemissä, missä liikennevirrat ovat riippumattomia. Tila-avaruuden katkaisuperiaateen mukaan sama jakauma pätee kapasiteettiehdon rajoitaamassa katkaistussa tila-avaruudessa.

Seuraus 4. Jos monta (m kpl) $M/M/1$-jonoa käyttää yhteistä odotustilaa (käytettävissä on yhteensä K systeemipaikkaa mukaanlukien yhteinen odostustila ja eri jonojen palvelimet), niin tilojen yhteisjakauma on

$$\mathrm{P}\{N_1 = n_1, \ldots, N_m = n_m\} = \frac{1}{G}\,\rho_1^{n_1} \cdots \rho_m^{n_m}, \qquad \text{kun } n_1 + \cdots + n_m \le K$$

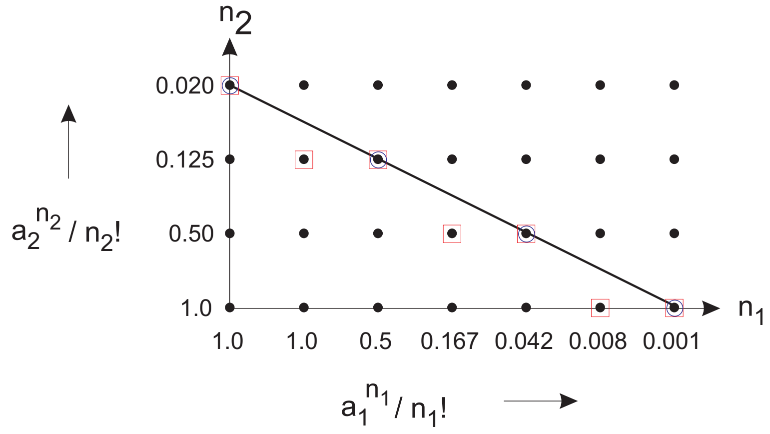
missä ρ_i on jonon i kuorma. Tulos seuraa suoraan siitä, että äärettömän odotustilan tapauksessa (silloinkin kun se on yhteinen) jonot ovat riippumattomia ja yhteisjakauma on triviaalisti tekijöiden $(1 - \rho_i)\rho_i^{n_i}$ tulo.

Esimerkki estojen laskennasta

Tarkastellaan tapausta, jossa linkkiä jonka kapasiteetti on C, käyttää kahteen eri liikenneluokkaan kuuluvat yhteydet. Parametrit ovat seuraavat:

$$C = 6 \text{ Mbps} \qquad \begin{cases} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 0.5 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 &= 1 \text{ Mbps} \\ b_2 &= 2 \text{ Mbps} \end{cases}$$

Tila-avaruus, sallittujen tilojen alue sekä liikenneluokkien estotilat näkyvät oheisesta kuvasta.



Lasketaan ensin reunajakaumat $a_k^{n_k}/n_k!$, $k = 1, 2$. Vakiotekijä $\exp(-a_k)$ voidaan jättää pois, koska katkaisun jälkeen joudutaan kuitenkin suorittamaan normitus.

Yksittäisen tilan normittamaton todennäköisyys on normittamattomien reunarvojen tulo.

Normitekijä $G(\Omega)$ on normittamattomien tilatodennäköisyyksien summa, $G(\Omega) = 4.41$.

Estotilajoukkojen yli lasketut normittamattomien todennäköisyyksien summat ovat

$$G(\mathcal{B}_1) = 0.11, \qquad G(\mathcal{B}_2) = 0.32$$

joista seuraavat estotodennäköisyydet

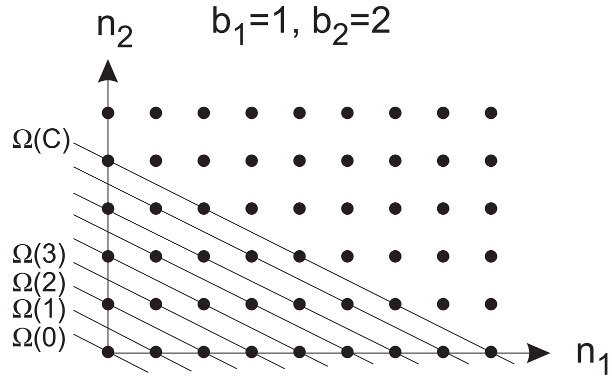
$$B_1 = \frac{G(\mathcal{B}_1)}{G(\Omega)} = 2.4\% \qquad B_2 = \frac{G(\mathcal{B}_2)}{G(\Omega)} = 7.3\%$$

Kaufmanin ja Robertsin rekursio

Edellä esitetty estojen laskenta perustui siihen, että tilojen todennäköisyydet laskettiin “käsin poimien” yksitellen yhteen. Laskentaan on olemassa myös tehokkaampia menetelmiä. Kaufmanin ja Robertsin rekursio on yksi tällainen.

Tässä tarkastellaan tilasummia tila-avaruuden tiettyjen osajoukkojen yli. Erityisesti määritellään joukko $\Omega(c)$ siten, että tähän kuuluvat täsmälleen ne tilat, joissa vaadittu kapasiteetti on c,

$$\mathbf{n} \in \Omega(c) \Leftrightarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = c$$



Nämä muodostavat tila-avaruuden osituksen, $\Omega = \bigcup_{c=0}^{C} \Omega(c)$.

Normittamattomien todennäköisyyksien summa tilajoukon $\Omega(c)$ yli on $G(\Omega(c))$. Merkitään tätä lyhyemmin $G(c)$:llä.

$$G(c) = \sum_{\mathbf{n}\cdot\mathbf{b}=c} \frac{a_1^{n_1}}{n_1!} \cdots \frac{a_K^{n_K}}{n_K!}$$

Tälle pätee seuraava rekursiokaava (todistus jätetään harjoitustehtäväksi)

$$\boxed{c\,G(c) = \sum_{k=1}^{K} a_k b_k G(c - b_k)}$$

Rekursion alku $G(0) = 1,\ G(c) = 0$, kun $c < 0$.

Kaufmanin ja Robertsin rekursio (jatkoa)

Koska $\Omega(c)$:t muodostavat Ω:n osituksen, normitusvakio on

$$G = G(\Omega) = \sum_{c=0}^{C} G(c)$$

Siten kapasiteettimiehityksen jakauma on

$$\mathrm{P}\{\mathbf{N} \in \Omega(c)\} = \mathrm{P}\{\mathbf{N} \cdot \mathbf{b} = c\} = \frac{G(c)}{G} \ ,$$

Liikenneluokan k estotiloja ovat selvästi ne tilat, joissa kapasiteettia on vapaana vähemmän kuin b_k eli joissa kapasiteettimiehitys on välillä $(C - b_k + 1) \ldots, C$.

$$\mathcal{B}_k = \bigcup_{c=C-b_k+1}^{C} \Omega(c)$$

ja vastavasti estotodennäköisyys on

$$\boxed{B_k = \frac{G(\mathcal{B}_k)}{G(\Omega)} = \frac{\displaystyle\sum_{c=C-b_k+1}^{C} G(c)}{\displaystyle\sum_{c=0}^{C} G(c)}}$$

Kaufmanin ja Robertsin rekursio (jatkoa)

Esimerkki. Sovelletaan KR-rekursiota edellisen esimerkin tehtävään.
Otetaan kapasiteetin yksiköksi 1 Mbps.

$$C = 6 \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 0.5 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = 2 \end{cases}$$

Rekursio ja rekursion alku

$$G(c) = \frac{1}{c}(G(c-1) + G(c-2)) \qquad \begin{cases} G(0) = 1 \\ G(c) = 0, \quad \text{kun } c < 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} G(1) = \frac{1}{1}(G(0)+G(-1)) = 1 & & G(4) = \frac{1}{4}(G(3)+G(2)) = \frac{5}{12} \\ G(2) = \frac{1}{2}(G(1)+G(0)) = 1 & & G(5) = \frac{1}{5}(G(4)+G(3)) = \frac{13}{60} \\ G(3) = \frac{1}{3}(G(2)+G(1)) = \frac{2}{3} & & G(6) = \frac{1}{6}(G(5)+G(4)) = \frac{19}{180} \end{array}}$$

$$B_1 = \frac{G(6)}{G(0)+\cdots+G(6)} = \frac{19}{793} \approx 2.4\%, \qquad B_2 = \frac{G(5)+G(6)}{G(0)+\cdots+G(6)} = \frac{58}{793} \approx 7.3\%$$

Konvoluutiomenetelmä

Kaufmanin ja Robertsin rekursion asemesta kapasiteetin miehitystodennäköisyydet voidaan laskea konvoluution avulla.

Tätä varten lasketaan ensin kapasiteetin miehitysjakauma yksittäisille liikennevirroille.

- Todennäköisyyksien ei tarvitse olla normitettuja, koska lopussa joudutaan kuitenkin tekemään tila-avaruuden katkaisusta johtuva uudelleennormitus.
- Yksitttäisen liikennevirran yhteyksien lukumäärän jakauman (normittamattomat) pistetodennäköisyydet ovat $a_k^{n_k}/n_k!$
- Kyseinen pistetodennäköisyys $a_k^{n_k}/n_k!$ on vastaavasti todennäköisyys sille, että kapasiteettimiehitys on $n_k b_k$.
- Kapasiteetin miehitystodennäköisyys on nollasta poikkeava vain sellaisille miehityksen arvoille, jotka ovat b_k:n monikertoja, ja 0 muulloin.

Edellisen esimerkin tapauksessa liikenneluokkien 1 ja 2 kapasiteettimiehityksen todennäköisyysvektorit miehityksen arvoon $c = 6$ asti ovat

$$\begin{cases} p_1 = (1.0 \quad 1.0 \quad 0.5 \quad 0.167 \quad 0.042 \quad 0.008 \quad 0.001) \\ p_2 = (1.0 \quad 0 \quad 0.5 \quad 0 \quad 0.125 \quad 0 \quad 0.020) \qquad \text{huom. 0:t välissä} \end{cases}$$

Konvoluutiomenetelmä (jatkoa)

Linkin kapasiteetin kokonaismiehitys on yksittäisten liikennevirtojen miehitysten summa.

- Äärettömän linkkikapasiteetin tapauksessa liikennevirrat ovat riippumattomia.
- Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma saadaan konvoluution avulla
- Linkin kapasiteetin C äääärellisyys aiheuttaa ainoastaan sen, että todennäköisyydet nollautuvat kapasiteettimiehityksille $> C$ ja että alkupään todennäköisyydet on uudelleennormitettava.

Merkitään $G = (G(0)\ G(1)\ \cdots\ G(C))$. Edellä sanotun mukaan G saadaan konvoluutiona,

$$G = p_1 \otimes p_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad G(c) = \sum_{i+j=c} p_1(i)p_2(j) = \sum_{i=0}^{c} p_1(i)p_2(c-i)$$

Useamman liikenneluokan tapauksessa lisätään (konvoluoidaan) liikenneluokka kerrallaan:

$$G_2 = p_2 \otimes p_1,\ G_3 = p_3 \otimes G_2,\ \cdots\ ,\ G_{K-1} = p_{K-1} \otimes G_{K-2},\ G = G_K = p_K \otimes G_{K-1}$$

Samoin kuin aikaisemmin lopuksi suoritetaan normitus

$$\mathrm{P}\{\mathbf{N} \cdot \mathbf{b} = c\} = \frac{G(c)}{\sum_{i=0}^{C} G(i)}, \quad c = 0, \ldots, C$$

Konvoluutiomenetelmä (jatkoa)

Konvoluution laskentaan voidaan käyttää myös generoivaa funktiota

$$\begin{cases} p_k(n_k) = \dfrac{a_k^{n_k}}{n_k!} \\ P_k(z) = \sum\limits_{n_k=0}^{\infty} p_k(n_k)\, z^{n_k b_k} = e^{a_k z^{b_k}} \end{cases}$$

(kapasiteettimiehityksen generoiva funktio; miehitys tilassa n_k on $n_k b_k$)

Kokonaismiehityksen generoiva funktio on

$$\sum_{c=0}^{\infty} G(c) z^c = \prod_{k=1}^{K} P_k(z) = \exp(\sum_k a_k z^{b_k})$$

Yksittäisten miehitystilojen (normittamattomat) todennäköisyydet $G(c)$ voidaan identifioidaan z:n eri potenssien kertoimista.

Käytännössä kustakin $P_k(z)$:sta otetaan vain tarvittava määrä termejä sarjan alusta (potenssiin C asti) ja kerrotaan nämä polynomit keskenään. Tulona saadun polynomin z:n eri potenssien kertoimet antavat normittamattomat todennäköisyydet.

Polynomien kertominen $\equiv$ konvoluutio:

$$\sum_i p_1(i) z^i \sum_j p_2(j) z^j = \sum_k \Big(\sum_{i=0}^{k} p_1(i) p_2(k-i) \Big) z^k$$

Päästä-päähän esto monibittinopeusverkossa

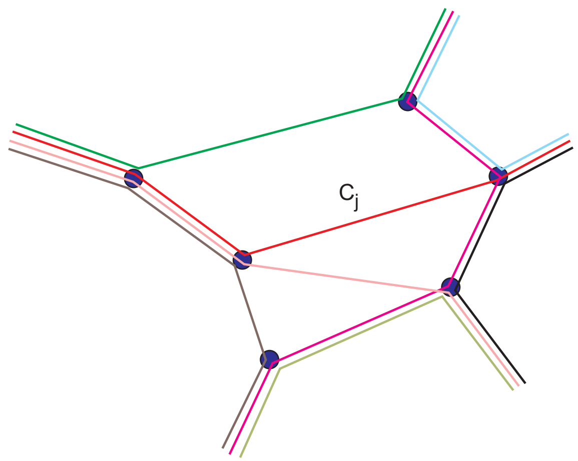
Edellä on tarkasteltu estoa yhdessä linkissä, jonka kapasiteetti on C. Nyt otetaan käsiteltäväksi päästä-päähän eston laskenta verkossa, jossa on useita linkkejä $j = 1, \ldots, J$, kapasiteetit C_j.

Kuten tullaan näkemään, käsitteellisellä tasolla verkkotapaus saadaan vain vähäisellä laajennuksella aikaisemmista tarkasteluista.

- Toinen asia on sitten, että päästä-päähän eston (tarkka) laskenta todelliselle verkolle voi käytännössä olla huomattavan työlästä.
- Aikaisemmin on käsitelty (yksinopeusverkon) päästä-päähän eston likimääräistä laskentaa (yksinopeus)verkossa vähennetyn kuorman menetelmän avulla. Tämä likimääräismenetelmä on laajennettavissa myös monibittinopeustapaukseen, joskaan laajennusta ei tässä esitetä.
- Yksinopeusverkon päästä-päähän estojen tarkka laskenta on erikoistapaus seuraavassa esitettävästä monibittinopeusverkon käsittelystä.

Esto monibittinopeusverkossa (jatkoa)

- Linkit $j = 1, \ldots, J$, kapasiteetit C_j
- Liikenneluokat $k = 1, \ldots, K$
- Liikenneluokan määräävät yhteyden reitti verkon läpi ja ja sen vaatima kapasiteetti.
- Luokka k tarvitsee $b_{j,k}$ kapasiteettiyksikköä (johtoa) linkillä j; efektiivinen kaista riippuu linkin kapasiteetista ja voi olla eri suuri eri linkeillä.
- Luokan k tarjottu liikenneintensiteetti on a_k.



Systeemin tilaa kuvaavat jälleen eri liikenneluokkiin kuuluvien yhteyksien lukumäärät (lukumäärämiehitys). Tila-avaruuden piste on vektori

$$\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_K)$$

Määritellään linkin j kapasiteettivektori, jonka komponentit kertovat eri liikenneluokkiin kuuluvien yhteyksien ko. linkillä tarvitsemat kapasiteetit $(= 0$, jos yhteys ei kulje linkin kautta)

$$\mathbf{b}_j = (b_{j,1}, \ldots, b_{j,K})$$

Tilassa $\mathbf{n}$ linkin j kapasiteetista on miehitetty määrä $\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_j$.

Esto monibittinopeusverkossa (jatkoa)

Jos linkkien kapasiteetit olisivat äärettömät, kaikki liikenneluokat olisivat toisistaan riippumattomia ja niiden lukumääräjakaumat noudattaisivat Poisson-jakaumaa

$$p_k(n_k) = \mathrm{P}\{N_k = n_k\} = \frac{a_k^{n_k}}{n_k!}\, e^{-a_k}$$

Eksponenttitekijä (vakio) ei ole tässä tärkeä ja voitaisiin jättää pois; todennäköisyydet joudutaan joka tapauksessa normittamaan lopussa.

Vastaavasti koko verkon yhteyksien miehitysjakauma olisi

$$p(\mathbf{n}) = \mathrm{P}\{N_1 = n_1, \ldots, N_1 = n_1\} = \prod_{k=1}^{K} p_k(n_k)$$

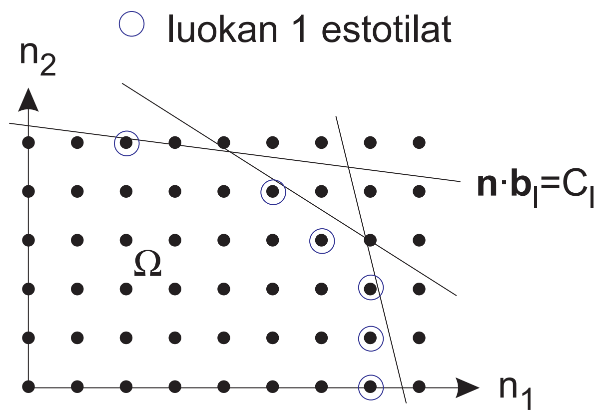
Helposti nähdään, että tämä jakauma toteuttaa detaljibalanssin.

- Siten senkin jälkeen, kun tila-avaruus katkaistaan linkkien äärellisiä kapasiteettien mukaisesti, jakauma säilyy sallitussa tila-avaruuden osassa normitusta vaille samana.

Linkkien äärelliset kapasiteetit rajoittavat mahdollisten miehitystilojen avaruutta Ω:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_j \leq C_j, \forall j$$

Ainoa ero yhden linkin tapaukseen on, että rajoitusehtoja on useita. Kukin yhteys kuluttaa useata resurssia.



Esto monibittinopeusverkossa (jatkoa)

Sallittujen tilojen joukossa Ω tilatodennäköisyydet ovat edelleen tulomuotoiset,

$$\pi(\mathbf{n}) = \begin{cases} \frac{1}{G} p(\mathbf{n}), & \mathbf{n} \in \Omega \\ 0, & \mathbf{n} \notin \Omega \end{cases} \qquad \text{missä} \quad G = G(\Omega) = \sum_{\mathbf{n}\in\Omega} p(\mathbf{n})$$

Liikennevirran k estotilojen joukko on

$$\mathcal{B}_k = \{\mathbf{n} : \mathbf{n} \in \Omega,\ \mathbf{n} + \mathbf{e}_k \notin \Omega\}$$

(estotilat ovat viimeisiä tiloja joukon Ω sisällä liikuttaessa k-akselin suuntaan)

ja liikenneluokan k estotodennäköisyys on

$$B_k = \sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{B}_k} \pi(\mathbf{n}) = \frac{\sum_{\mathbf{n}\in\mathcal{B}_k} p(\mathbf{n})}{\sum_{\mathbf{n}\in\Omega} p(\mathbf{n})} = \frac{G(\mathcal{B}_k)}{G(\Omega)}$$

- Muodollisesti ratkaisu on aivan sama kuin yhden linkin tapauksessa.
- Usean linkkirajoituksen vuoksi tilajoukot Ω ja $\mathcal{B}_k$ ovat mutkikkaita eikä tilasummia ole yleensä helppo laskea.
- Tila-avaruuden koko realistisilla systeemeillä on tähtitieteellinen, eikä tilojen laskeminen yhteen yksitellen ole mitenkään mahdollista.

Esto monibittinopeusverkossa (jatkoa)

On kuitenkin hyödyllistä todeta, että eston laskemiseksi riittää, jos osataan laskea tyyppiä $G(\Omega)$ oleva tilasumma, missä Ω on lineaaristen rajoitusehtojen määräämä tila-avaruus.

Määritellään liikenneluokan k hyväksymistilojen joukko $\mathcal{S}_k$

$$\mathcal{S}_k = \{\mathbf{n} : \mathbf{n} + \mathbf{e}_k \in \Omega\} = \{\mathbf{n} : \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_j \le C_j - b_{j,k}\ \forall j\}$$

tilat **n** joissa voidaan vastaanottaa uusi luokan k kutsu

Havaitaan, että tämä on joukon $\mathcal{B}_k$ komplementti Ω:n suhteen: $\Omega = \mathcal{B}_k + \mathcal{S}_k$. Vastavasti pätee

$$G(\Omega) = G(\mathcal{B}_k) + G(\mathcal{S}_k) \quad \Rightarrow \quad B_k = \frac{G(\mathcal{B}_k)}{G(\Omega)} = 1 - \frac{G(\mathcal{S}_k)}{G(\Omega)}$$

Joukon S_k määrittely on muodoltaan samanlainen kuin joukolla Ω, ainoastaan sillä erotuksella, että kunkin linkin j kapasiteettia on pienennetty määrällä $b_{j,k}$.

Määritellään vektorit $\mathbf{C} = (C_1, \ldots, C_J)$ ja $\mathbf{b}^{(k)} = (b_{1,k}, \ldots, b_{J,k})$.

Vektori $\mathbf{C}$ määrää joukon Ω: $\Omega = \Omega(\mathbf{C})$. Tätä merkintää käyttäen on $\mathcal{S}_k = \Omega(\mathbf{C} - \mathbf{b}^{(k)})$. Kun vielä merkitään lyhyemmin $G(\Omega(\mathbf{C})) = G(\mathbf{C})$, päädytään tulokseen

$$\boxed{B_k = 1 - \frac{G(\mathbf{C} - \mathbf{b}^{(k)})}{G(\mathbf{C})}}$$

Eston laskenta hierarkkisessa liityntäverkossa (access network)

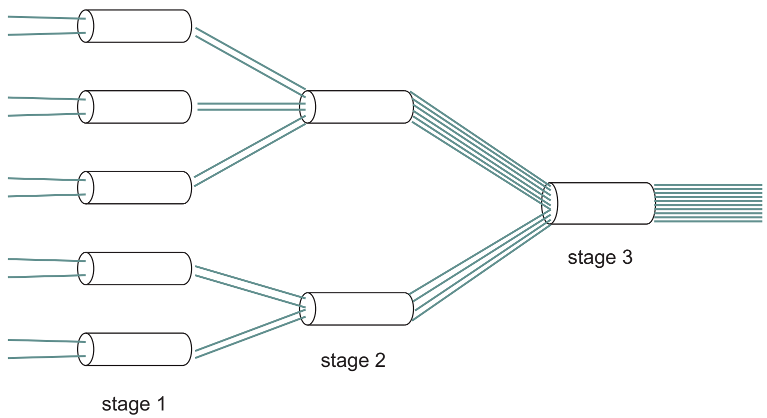
Päästä-päähän eston ilmoittavan tarkan kaavan evaluoiminen sellaisenaan ei tila-avaruuden suuren koon vuoksi ole yleensä mahdollista.

Ei myöskään tunneta yleistä menetelmää laskujen tehostamiseksi siinä määrin, että tarkka tulos voitaisiin aina laskea.

- Likimääräismenetelmiä on. Aikaisemmin mainitun vähennetyn kuorman menetelmän lisäksi eräs keino on arvioida tilasummat Monte Carlo -simuloinnin avulla; tällöin arvioihin jää tietty tilastollinen virhe.

Kuitenkin eräissä erikoistapauksissa laskut voidaan viedä läpi eksaktisti suhteellisen pienellä työllä.

Tällainen tilanne esiintyy mm. silloin, kun verkko on topologialtaan puu, kuten se on viereisen kuvan esittämässä liityntäverkossa.



Esto liityntäverkossa (jatkoa)

Ideana on edetä laskuissa vaiheittain:

- Ensin lasketaan kapasiteettimiehityksen jakauma asteen 1 linkeissä olettaen, että kaikkien ylempien asteiden linkkien kapasiteetit ovat äärettömiä.
- Tällöin asteen 1 linkit ovat riippumattomia. Kunkin linkin miehitysjakauma voidaan laskea niinkuin aikaisemmin on opittu konvoluoimalla linkkiin tarjottujen liikenneluokkien miehitysjakaumat.
  - Jos hetkeksi ajatellaan myös asteen 1 linkin kapasitteetti äärettömäksi, niin jakauma on yksittäisten liikenneluokkien kapasiteettimiehitysjakauman konvoluutio.
  - Yhteisprosessi toteuttaa detaljibalanssin, joten äärellisen kapasiteetin huomioonottaminen ainoastaan katkaisee konvoluution tuloksena saadun koko linkin kapasiteettimiehitysjakauman (uudelleennormitus jätetään tässä vaiheessa tekemättä). Myös katkaistun tila-avaruuden yhteisprosessi toteuttaa detaljibalanssin.
- Tarkastellaan nyt jotakin asteen 2 linkeistä. Koska sitä syöttävät asteen 1 linkit ovat riippumattomia, saadaan tarjottu kapasiteettimiehitys kovoluoimalla syöttävien linkkien katkaistut jakaumat keskenään. Yhteisprosessi on jälleen detaljibalanssin toteuttava, joten asteen 2 linkin äärellinen kapasiteetti otetaan huomioon katkaisemalla konvoluoitu jakauma (ylempien asteiden linkit oletetaan edelleen äärettömiksi).

Esto liityntäverkossa (jatkoa)

- Samalla tavalla käsitellän kaikki asteen 2 linkit laskien niille kapasiteettirajoituksen mukaisesti katkaistut kapasiteettimiehitysjakaumat.
- Tämän jälkeen siirrytään seuraavaan asteeseen ja laskenta toistuu.

Mielivaltaisen linkin käsittelyssä on kaksi operaatiota:

1. Konvoluoidaan linkkiä syöttävien alemman asteen linkkien katkaistut jakaumat
2. Katkaistaan konvoluution tuloksena saatu jakauma linkin kapasiteetin mukaisesti.

Kuvattu konvoluutio-katkaisu-rekursio viedään läpi koko verkon edeten alemmista asteista ylintä kohti. Lopulta tullaan viimeiseen linkkiin, johon sovellettuna prosessi antaa kyseisen linkin katkaistun "kapasiteettimiehitysjakauman" eli arvot $g(c) = \mathrm{P}\{\text{linkin kap.miehitys} = c\}$, $c = 0, \ldots, C$, missä C on kyseisen linkin kapasiteetti.

Jos $g(c)$ olisi todellinen jakauma, olisi summa $\Sigma_{c=0}^{C} g(c) = 1$. Nyt on kuitenkin jätetty uudelleennormitukset tekemättä ja havaitaan, että kyseinen summa on itse asiassa kaikkien alkuperäisen äärettömän kapasiteetin systeemin tilatodennäköisyyksien summa kaikkien niiden tilojen yli, jotka kuuluvat sallittujen tilojen avaruuteen. Vaiheittain tehtyjen katkaisujen avulla on karsittu pois ne tilat, jotka ovat sallitun alueen ulkopuolella.

Esto liityntäverkossa (jatkoa)

Näin päätellään, että pätee

$$\boxed{G(\Omega) = G(\mathbf{C}) = \sum_{c=0}^{C} g(c)}$$

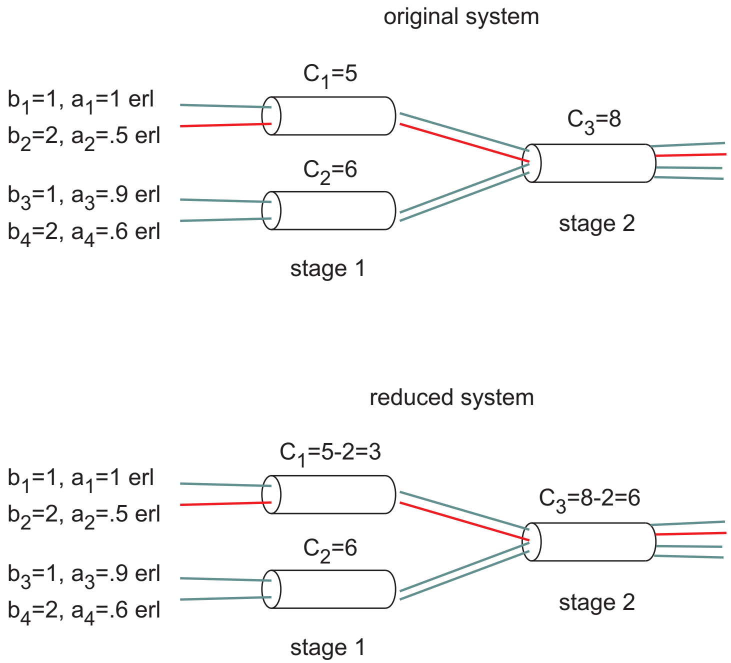
$G(\mathbf{C})$ on aikaisemmin mukaisesti lyhennysmerkintä $G(\Omega(\mathbf{C}))$:lle, missä on korostettu tila-avaruuden riippuvuutta verkon eri linkkien kapasiteeteista (eli vektorista $\mathbf{C}$).

Liityntäverkon tapauksessa osataan siis laskea tyyppiä $G(\mathbf{C})$ oleva tilasumma. Aikaisemman mukaisesti tämä on kaikki, mitä tarvitaan annetun liikenneluokan päästä-päähän eston laskemiseksi,

$$\boxed{B_k = 1 - \frac{G(\mathbf{C} - \mathbf{b}^{(k)})}{G(\mathbf{C})}}$$

Tilasumma lasketaan siis kahteen kertaan: ensin alkuperäisillä kapasiteeteilla, jolloin saadaan $G(\mathbf{C})$, ja sitten verkolle, jossa <u>kiinnostavan liikenneluokan k reitin varrella olevien linkkien j</u> kapasiteetteja on pienennetty määrillä $b_{j,k}$, jolloin saadaan $G(\mathbf{C} - \mathbf{b}^{(k)})$.

Esto liityntäverkossa: esimerkki



Tarkastellaan kuvan mukaista kaksiasteista liityntäverkkoa.

Kumpaankin ensimmäisen asteen linkkiin (linkit 1 ja 2) tarjotaan kahden eri liikenneluokan liikennettä, kaistat $b_1 = b_3 = 1$ ja $b_2 = b_4 = 2$ liikenneintensiteeteillä (erl) $a_1 = 1$, $a_2 = 0.5$, $a_3 = 0.9$ ja $a_4 = 0.6$.

Tehtävänä on laskea linkkiin 1 tarjotun liikenneluokan 2 yhteyksien kokema esto.

On siis laskettava tilasummat alkuperäiselle systeemille sekä systeemille, jossa linkkien kapasiteetteja reitin varrella on vähennetty 2:lla (alempi kuva).

Laskut tehdään kätevimmin generoivien funktioiden avulla.

Merkitään T_n:llä katkaisuoperaattoria, joka ottaa z:n polynomista (tai potenssisarjasta) termit mukaan termiä z^n myöten. Esim.

$$T_3(1 + z + 0.3z^2 + 0.1z^3 + 0.05z^4 + 0.01z^5) = 1 + z + 0.3z^2 + 0.1z^3$$

Esimerkki (jatkoa)

Alkuperäinen systeemi

Linkille 1 tarjottujen liikennevirtojen synnyttämien (normittamattomien) miehitysjakaumien katkaistut generoivat funktiot

$$\begin{cases} g_{1,1}(z) &= T_5(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1.0z)^n}{n!}) &= 1+z+0.5z^2+0.1667z^3+0.0417z^4+0.0083z^5 \\ g_{1,2}(z) &= T_5(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(0.5z^2)^n}{n!}) &= 1+0.5z^2+0.125z^4 \end{cases}$$

Linkin 1 kokonaismiehityksen katkaistun (normittamattoman) jakauman generoiva funktio

$$g_1(z) = T_5(g_{1,1}(z)g_{1,2}(z)) = 1+z+z^2+0.6667z^3+0.4167z^4+0.2167z^5$$

Vastaavasti linkille 2

$$\begin{cases} g_{2,1}(z) &= T_6(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(0.9z)^n}{n!}) &= 1+0.9z+0.4050z^2+0.1215z^3+0.0273z^4+0.0049z^5+0.0007z^6 \\ g_{2,2}(z) &= T_6(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(0.6z^2)^n}{n!}) &= 1+0.6z^2+0.18z^4+0.036z^6 \end{cases}$$

$$g_2(z) = T_6(g_{2,1}(z)g_{2,2}(z)) = 1+0.9z+1.0050z^2+0.6615z^3+0.4503z^4+0.2398z^5+0.1260z^6$$

Linkin 3 kokonaismiehityksen katkaistun (normittamattoman) jakauman generoiva funktio

$$g_3(z) = T_8(g_1(z)g_2(z)) = 1+1.9z+2.905z^2+3.2332z^3+3.1335z^4+2.6133z^5+1.8709z^6+1.1595z^7+0.6169z^8$$

Esimerkki (jatkoa)

Vähennetty systeemi (merkitään vastaavia generoivia funktioita h:lla)

Linkin 1 kapasiteetti vähennetyssä systeemissä on 3.

$$\begin{cases} h_{1,1}(z) &= T_3(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1.0z)^n}{n!}) &= 1 + z + 0.5z^2 + 0.1667z^3 \\ h_{1,2}(z) &= T_3(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(0.5z^2)^n}{n!}) &= 1 + 0.5z^2 \end{cases}$$

$$h_1(z) = T_3(h_{1,1}(z)h_{1,2}(z)) = 1 + z + z^2 + 0.6667z^3$$

Linkki 2 on vähennetyssä systeemissä sama kuin alkuperäisessä systeemissä:

$$h_2(z) = g_2(z) = 1 + 0.9z + 1.0050z^2 + 0.6615z^3 + 0.4503z^4 + 0.2398z^5 + 0.1260z^6$$

Linkin 3 kapasiteetti vähennetyssä systeemissä on 6.

$$h_3(z) = T_6(h_1(z)h_2(z)) = 1 + 1.9z + 2.905z^2 + 3.2332z^3 + 2.7168z^4 + 2.0217z^5 + 1.2572z^6$$

Estotodennäköisyys (liikenneluokka $k = 2$: linkkiin 1 tarjotut kaistanleveyden 2 yhteydet)

$$B_2 = 1 - \frac{G(\mathbf{C} - \mathbf{b}^{(2)})}{G(\mathbf{C})} = 1 - \frac{h_3(1)}{g_3(1)} = \underline{0.184}$$