Helsinki University of Technology
Laboratory of Telecommunications Technology

S-38.211 Signaalinkäsittely tietoliikenteessä I
Signal Processing in Communications (2 ov)

Syksy 1998

9. Luento: Kanavan kapasiteetti ja OFDM

prof. Timo Laakso
Vastaanotto torstaisin klo 10-11
Huone G210, puh. 451 2473
Sähköposti: timo.laakso@hut.fi

Notaatiosta

- Merkitään ei-negatiivisen reaaliarvoisen funktion *aritmeettista keskiarvoa:*

$$\langle f \rangle_{A,X} = \frac{1}{|X|}\int_X f(x)dx \qquad (10.3)$$

- missä itseisarvo on joukon X kokonaismitta (yl. integrointivälin pituus). Vastaavasti määritellään *geometrinen keskiarvo*:

$$\langle f \rangle_{G,X} = \exp\left\{\frac{1}{|X|}\int_X \log_e[f(x)]dx\right\} \qquad (10.4)$$

- Voidaan osoittaa, että aina pätee

$$\langle f \rangle_{G,X} \le \langle f \rangle_{A,X} \qquad (10.7)$$

ISI ja kanavan kapasiteetti (LM 10.5)

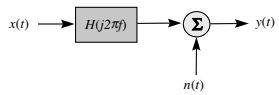
- Aikanaan todettiin jatkuva-aikaisen kaistarajoitetun Gaussin kanavan kapasiteetiksi

$$C = W\log_2(1+SNR) \qquad \text{bit / s}$$

- missä W on (yksipuolinen) kaistanleveys ja SNR on keskimääräisen signaalitehon ja kohinatehon suhde. Tulos pätee kuitenkin vain olettaen, että
  - *kohina* on taajuussisällöltään *valkoista* (kaistalla W)
  - kanava *ei* aiheuta *taajuusselektiivistä vaimennusta* (josta seuraa ISIä!)
- Seuraavaksi tarkastellaan *yleistä lineaarista kanavaa värillisessä Gaussin kohinassa*. Tämä tulos on tärkeä, sillä se kertoo rajat adaptiivisten korjaimien suorituskyvylle.

Vedenkaatoteoreema (LM 10.5.1)

- Tarkastellaan **Kuvan 10-19** lineaarista jatkuva-aikaista kanavamallia:



- Otetaan kanavasta *kapea taajuussiivu* Δf taajuudelta f_0. Merkitään:
- $S_x(j2\pi f_0)$ = *signaalin* tehospektri taajuudella f_0
- $S_n(j2\pi f_0)$ = *kohinan* tehospektri taajuudella f_0
- $H(j2\pi f_0)$ = *kanavan* vaste taajuudella f_0

...Vedenkaatoteoreema

- Oletetaan lisäksi että *kokonaisteho P_s on rajoitettu.* Lähetyssignaalin $x(t)$ spektri $S_x(j2\pi f_0)$ halutaan valita niin että saavutetaan maksimikapasiteetti.
- Koska kapea taajuussiivu voidaan olettaa valkoisen Gaussin kohinan kanavaksi, siivun kapasiteetiksi saadaan

$$C(j2\pi f_0) = \Delta f \log_2\left(1+\frac{2S_x(j2\pi f_0)|H(j2\pi f_0)|^2\Delta f}{2S_n(j2\pi f_0)\Delta f}\right)$$

$$= \Delta f \log_2\left(1+\frac{S_x(j2\pi f_0)|H(j2\pi f_0)|^2}{S_n(j2\pi f_0)}\right) \qquad (10.106)$$

...Vedenkaatoteoreema

- Raja-arvoprosessilla ja integroimalla koko taajuusalueen yli saadaan *kokonaiskapasiteetti:*

$$C = \int_0^\infty \log_2\left(1+\frac{S_x(j2\pi f)|H(j2\pi f)|^2}{S_n(j2\pi f)}\right)df$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \log_2\left(1+\frac{S_x|H|^2}{S_n}\right)df \qquad (10.107)$$

- Määritetään nyt optimaalinen signaalin tehospektri siten että kapasiteetti maksimoituu. Kokonaisteho on rajoitettu (ja positiivinen!):

$$P_s = \int_{-\infty}^{\infty} S_x df, \quad S_x > 0 \qquad (10.108)$$

...Vedenkaatoteoreema

- Rajoitettu optimointiprobleema voidaan muotoilla *Lagrangen kertojan* avulla seuraavasti: Maksimoidaan funktio

$$g(S_x,\lambda) = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \log_2\left(1+S_x|H|^2/S_n\right)df + \lambda\left[P_s - \int_{-\infty}^{\infty} S_x df\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\tfrac{1}{2}\log_2\left(1+S_x|H|^2/S_n\right) - \lambda S_x\right]df + \lambda P_s \qquad (10.109)$$

- Optimi löytyy derivaattojen nollakohdasta:

$$\frac{\partial g}{\partial S_x} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\ln 2}\cdot\frac{1}{1+S_x|H|^2/S_n}\cdot\frac{|H|^2}{S_n} - \lambda\right]df = 0$$

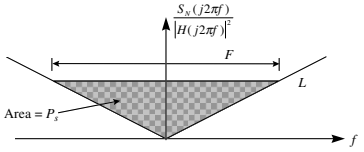
$$\frac{\partial g}{\partial \lambda} = P_s - \int_{-\infty}^{\infty} S_x df = 0$$

...Vedenkaatoteoreema

- Ratkaisu saadaan muotoon

$$S_x = \begin{cases} L - \dfrac{S_n}{|H|^2}, & f \in F \\ 0, & muutoin \end{cases} \qquad (10.110)$$

- missä $L = 1/2\ln 2\lambda$ (kirjassa painovirhe!) valitaan kokonaistehon P_s mukaan ja F on se taajuusalue jossa saatu S_x on positiivinen. Tätä tulosta havainnollistaa **Kuva 10-20**:



...Vedenkaatoteoreema

- Kuvassa on esitetty kanavan amplitudivasteella *normalisoitu kohinan tehospektri*
- Kuvasta nähdään että *lähetystehoa kannattaa käyttää eniten* taajuuksilla joissa
  - kohinatehotiheys on pieni
  - kanavan vaste on suuri (pieni vaimennus)

- Kokonaisteho saadaan integroimalla L:n ja normalisoidun spektrin välinen alue:

$$P_s = \int_{-\infty}^{\infty} S_x df = \int_{-\infty}^{\infty} \left[L - \frac{S_n}{|H|^2} \right] df$$

Kapasiteetti ja keskiarvot (LM 10.5.3)

- Edellä johdetuissa kaavoissa jäi ratkaisematta Lagrangen kertoja λ (tai siitä riippuva parametri L) jotka riippuvat kokonaistehosta. Se ratkaistaan seuraavaksi. Näin kapasiteetti saadaan pelkästään kanavaparametreista riippuvaan muotoon.
- Kaavasta (10.110) saadaan integroimalla

$$\frac{P_s}{|F|} = \int_F S_x df = L - \int_F \frac{S_n}{|H|^2} df$$
$$= \langle S_x \rangle_A = L - \left\langle S_n / |H|^2 \right\rangle_A \qquad (10.129)$$

$$\Rightarrow L = \left\langle S_n / |H|^2 \right\rangle_A - \langle S_x \rangle_A \qquad (10.129')$$

...Kapasiteetti ja keskiarvot

- Sijoittamalla (10.129) kap. lausekkeeseen (10.119) saadaan

$$C = \tfrac{1}{2} \int_F \log_2 \left(1 + \left[L - \frac{S_n}{|H|^2} \right] \frac{|H|^2}{S_n} \right) df =$$
$$= \tfrac{1}{2} \int_F \log_2 \left(\frac{L|H|^2}{S_n} \right) df \qquad (10.130)$$

ja edelleen käyttämällä geometrisen keskiarvon ominaisuutta

$$\log_2 \langle H \rangle_G = \frac{1}{|F|} \int_F \log_2 (H) df \qquad (10.5)$$

...Kapasiteetti ja keskiarvot

Saadaan

$$C = \frac{|F|}{2} \log_2 \left\langle \frac{L|H|^2}{S_n} \right\rangle_G = \frac{|F|}{2} \log_2 \left(\frac{L}{\left\langle S_n / |H|^2 \right\rangle_G} \right) \qquad (10.131)$$

Kaavasta (10.129') saadaan L ja sijoitetaan:

$$C = \frac{|F|}{2} \log_2 \left(\frac{P_s / |F| + \left\langle S_n / |H|^2 \right\rangle_A}{\left\langle S_n / |H|^2 \right\rangle_G} \right) \quad \text{bit/s} \quad (10.132)$$

Tämä on ***yleinen lineaarisen kanavan kapasiteetti*** joka sisältää siis myös ISIn vaikutuksen. Se kertoo, mihin asti adaptiivisilla korjaimilla, kanavakoodauksella yms. konsteilla voidaan kanavan kapasiteettia korkeintaan nostaa.

Esimerkki 10-26

- Kun kohina $S_n = N_0$ on valkoista, kapasiteetiksi saadaan

$$C = \frac{|F|}{2}\log_2\left(\frac{SNR + \left\langle |H|^{-2}\right\rangle_A}{\left\langle |H|^{-2}\right\rangle_G}\right) \quad \text{bit / s} \quad (10.133)$$

missä

$$SNR = P_S / \left(|F| N_0\right)$$

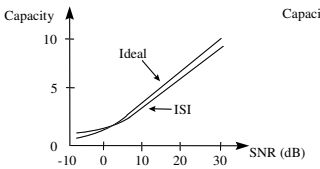
Edelleen, jos kanava on $H = 1$, kaava redusoituu Shannonin perusmuotoon

$$C = \frac{|F|}{2}\log_2\left(\frac{SNR+1}{1}\right) = W\log_2\left(1+SNR\right) \quad \text{bit / s}$$

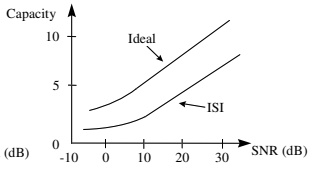
missä $F = 2W$ on kaksipuolinen kaistanleveys.

Esimerkki: FIR- ja IIR-kanavan kapasiteetti.

- Tarkastellaan 1. asteen diskreettiä kanavamallia joka sisältää joko yhden nollan tai navan jonka säde on $c = 0.99$. Vastaava kanavan kapasiteetti eri signaalikohinasuhteilla (valkoista Gaussin kohinaa) näkyy **Kuvissa 10-24 ja 10-25**.
- Miltäs näyttää? Mistä erot johtuvat?



Kuva 10-24: FIR-kanava



Kuva 10-25: IIR-kanava

OFDM-järjestelmät

- Yksi tapa käyttää tehokkaasti lineaarista kanavaa on ns. OFDM-tekniikka (Orthogonal Frequency Division Multiplex) joka on monikantoaaltojärjestelmä.
- Seuraavassa johdetaan ensin yleinen korrelaattori-vastaanotinrakenne ortogonaalisille monipulssijärjestelmille ja sitten tarkastellaan OFDM:n toteutusta erikoistapauksena.

Sovitettu suodin ja korrelaattori

- Vastaanottosuotimen ja näytteenoton lähtösignaali:

$$q_0 = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) f(t-\tau) d\tau\big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) f(-\tau) d\tau \qquad (6.91)$$

- Kun vastaanottosuodin on sovitettu, $f(t) = h(-t)$, saadaan

$$q_0 = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) h(\tau) d\tau$$

joka voidaan toteuttaa *korrelaatiorakenteella*.

- Tätä korrelaatiovastaanottimen ideaa voidaan soveltaa monissa käytännön järjestelmissä jotka perustuvat usean lähetyspulssin käyttöön (mm. hajaspektri- ja monikantoaaltojärjestelmät).

Ortogonaalinen monipulssimodulaatio

- Pulssiamplitudimodulaatiossa symbolit kerrotaan *yhdellä* valitulla pulssimuodolla $g(t)$ ja lähetetään kanavaan yksi kerrallaan:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, g(t - kT) \qquad (6.112)$$

- Tämä voidaan yleistää tapaukseen jossa kutakin N symbolia vastaa oma pulssimuoto, $g_n(t)$, $n = 0, 1, .., N\text{-}1$:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{a_k}(t - kT) \qquad (6.113)$$

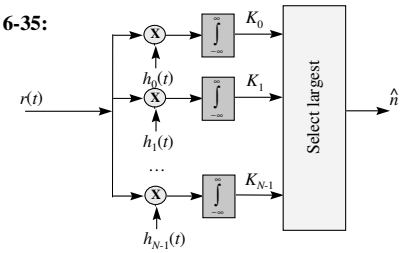
...Ortogonaalinen monipulssimodulaatio

- Jotta pulssit ovat erotettavissa vastaanottimessa, vaaditaan ortogonaalisuus (+ normalisoidaan tehot): saadaan *ortogonaalinen monipulssimodulaatio:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_i(t) g_j{}^*(t) dt = \sigma_g^2 \delta_{i-j} \qquad (6.114)$$

Korrelaatiovastaanotin monipulssimodulaatiolle

- **Kuva 6-35:**



- Tarkastellaan järjestelmää jossa lähetetään yksi N pulssista , n $h_n(t) = 0, 1, \ldots, N\text{-}1$, jotka ovat ortogonaalisia, eli

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_i(t) h_j{}^*(t) dt = \sigma_h^2 \delta_{i-j} \qquad (6.118)$$

...Korrelaatiovastaanotin monipulssimodulaatiolle

- Vastaanotettu signaali on siis muotoa

$$y(t) = h_n(t) + n(t) \qquad (6.119)$$

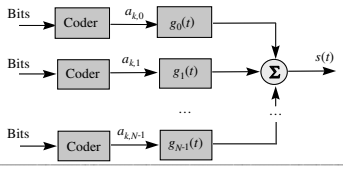
- Korrelaatiovastaanotin muodostaa N ristikorrelaatiotermiä

$$K_i = \int_{-\infty}^{\infty} h_i(t) y(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} h_i(t) h_n(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} h_i(t) n(t) dt \qquad (6.120)$$

- Ortogonaalisuusehdon mukaan vain K_n poikkeaa kohinasta.

CDMA-järjestelmä

- Code Division Multiple Access (CDMA) eli *koodijakomonikäyttöjärjestelmä*
- Perustuu ortogonaalisiin (tai lähes) binäärisekvensseihin
- Eri käyttäjät käyttävät samaa taajuusaluetta (esim. koaksiaalikaapelia, radio- tai optista kanavaa - jopa siirtoa sähköverkossa on tutkittu!)
- Lähettimen periaate (**Kuva 6-56**):



Monikantoaaltojärjestelmät

- Orthogonal Frequency Division Multiplex (OFDM), Discrete Multitone (DMT)
- Valitaan pulssimuodot seuraavasti:

$$g_n(t) = \sqrt{\frac{1}{T}} e^{j\omega_c t} w(t) \qquad (6.167)$$

- missä $w(t)$ on symbolin mittainen suorakaide ja taajuudet valitaan

$$\omega_c = \frac{2\pi n}{T}, \quad n = 0,1,\ldots,N-1 \qquad (6.168)$$

...Monikantoaaltojärjestelmät

- Diskreettiaikainen toteutus:

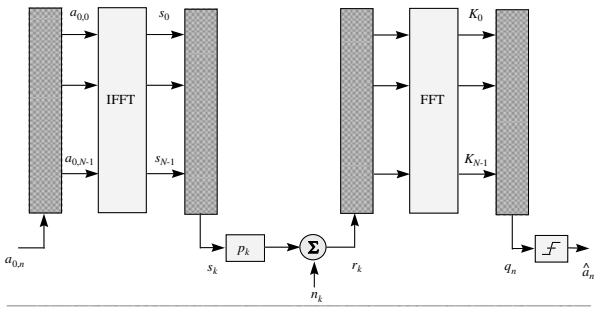
$$g_k^{(n)} = \frac{1}{N} e^{j2\pi nk/N} w_k, \quad n = 0,1,\ldots,N-1 \qquad (6.170)$$

- Tässä yksi symboli on N näytteen pituinen. Yksi pulssi saadaan symboliarvoilla painotettuna kombinaationa:

$$s_k^{(n)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a_{0,n} e^{j2\pi nk/N} w_k \qquad (6.172)$$

...Monikantoaaltojärjestelmät

- *Lähettimen* toteutus IFFT:n avulla (**Kuva 6-54**)



...Monikantoaaltojärjestelmät

- *Vastaanotin:* Korrelaatiopankki FFT:llä
- Vastaanotetut näytteet muotoa

$$r_k = s_k + z_k \qquad (6.173)$$

- Yhden korrelaattorin laskenta:

$$K_i = \sum_{n=0}^{N-1} r_k e^{-j2\pi ik/N}, \quad i = 1,2,\ldots,N-1 \qquad (6.174)$$

Monikantoaaltojärjestelmän etuja

- Kullekin kantoaallolle voidaan valita oma aakkosto
- Signaalin tehospektri säädettävissä kantoaalloittain kanavan mukaan (kapasiteetin maksimointi!)
- Monikäyttö: kanavia voidaan jakaa joustavasti eri käyttäjille esim. radiojärjestelmissä
- Kanavan ekvalisointi helppoa