



S-38.211 Signaalinkäsittely tietoliikenteessä I
Signal Processing in Communications (2 ov)

Syksy 1998

6. Luento: Adaptiiviset korjaimet I

prof. Timo Laakso

Vastaanotto torstaisin klo 10-11

Huone G210, puh. 451 2473

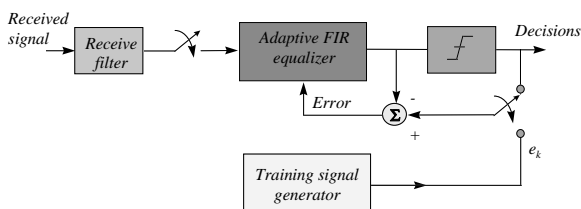
Sähköposti: timo.laakso@hut.fi

Adaptiivinen FIR-korjain (LM 11)



- ◆ Viimeksi tarkasteltiin ideaalisen korjaimen z -siirtofunktiota. Z -siirtofunktion kompleksisuutta ei rajoitettu, ja se oli yleensä paitsi rekursiivista muotoa myös ääretön asteluvultaan.
- ◆ Seuraavassa rajoitetaan *äärellisen pituiseen FIR-korjaimen*. Ensin johdetaan matriisnotaation avulla *ideaalinen MMSE-ratkaisu*. Tämän pohjalta kehitetään *gradienttityyppinen iteratiivinen ratkaisumenetelmä* matriisiyhtälölle joka yksinkertaistuu aikanaan käyttökelpoiseksi *LMS (least mean square)-adaptointi-algoritmiksi*.
- ◆ LMS-algoritmi on pohjana useimmille käytännön lineaarisille ja takaisinkytketyille (DFE-)korjaimille.

Adaptiivisen korjaimen rakenne



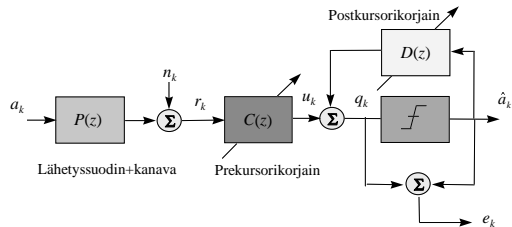
- ◆ Adaptiivisen *lineaarisen* korjaimen perusrakenne on **Kuvassa 11-1**.

...Adaptiivisen lin. korjaimen rakenne



- ◆ Alkupään vastaanottosuodatin on yleensä *alipäästösuodatin*, joka poistaa kohinaa
- ◆ Adaptiivinen (lineaarinen) korjain toteutetaan yleensä *FIR-rakenteella*
- ◆ Korjaimen kertoimia ohjataan *virhesignaalilla*.
Virhesignaali muodostetaan
- ◆ *Alustusvaiheessa* (training mode) lähettämällä tunnettu testisignaali
- ◆ *Seurantavaiheessa* (tracking mode) käyttämällä hyväksi menneitä päätöksiä. Virheelliset päätökset (alle 10%) eivät juuri haittaa.

Adaptiivisen DFE-korjaimen rakenne



- ◆ Päätöstakaisinkytkennän sisältävän kantataajuisten DFE-korjaimen diskreetti-aikainen mallin perusrakenne on **Kuvassa 11-2**.

21.10.1998

Teletekniikan laboratorio

Sivu 5

...Adaptiivisen DFE-korjaimen rakenne

- ◆ Adaptointi perustuu virhesignaaliin missä on *alustusvaiheessa* tunnettu symbolisekvenssi ja *seurantavaiheessa* vastaanottimen päätössekvenssi.
- ◆ *Prekursorin* N -tappinen siirtofunktio on muotoa (Huom! Kanava-lähetysuodin on nyt $P(z)$ ja korjain $C(z)$)

$$C(z) = \sum_{m=-(N-1)}^0 c_m z^{-m} \quad (11.3)$$

(käytännössä kausaloitava N viiveellä). *Postkursori* on

$$D(z) = \sum_{m=1}^M d_m z^{-m} \quad (11.4)$$

- ◆ Tämä toteutetaan M -tappisella FIR-rakenteella.

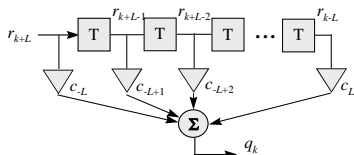
21.10.1998

Teletekniikan laboratorio

Sivu 6

3

FIR-korjaimen MSE-ratkaisu (LM 11.1.2)



- ◆ Johdetaan N -tappisen FIR korjaimen (11.2) MSE. Määritellään ensin kerroinvektori

$$\mathbf{c} = [c_{-L} \ \dots \ c_0 \ \dots \ c_L]^T \quad (11.5)$$

- ◆ missä ovat FIR-suotimen kertoimet, $N = 2L + 1$ ja N oletetaan parittomaksi.

21.10.1998

Teletekniikan laboratorio

Sivu 7

... FIR-korjaimen MSE-ratkaisu

- ◆ Vastaavat suodatettavat korjaimen input-näytteet hetkellä k kootaan samanmittaiseksi vektoriksi:

$$\mathbf{r}_k = [r_{k+L} \ \dots \ r_k \ \dots \ r_{k-L}]^T \quad (11.6)$$

- ◆ Virhesignaali saadaan muotoon

$$e_k = a_k - q_k = a_k - \mathbf{c}^T \mathbf{r}_k \quad (11.7)$$

- ◆ Yleisesti kaikki suureet ovat *kompleksi-arvoisia*. Oletetaan lisäksi että kaikki signaalit ovat *nollakeskiarvoisia* ja (laajassa mielessä) *stationäärisiä* eli niiden stokastiset ominaisuudet eivät muutu ajan funktiona.

21.10.1998

Teletekniikan laboratorio

Sivu 8

4

... FIR-korjaimen MSE-ratkaisu



- ◆ Neliövirhe voidaan työstää muotoon (**Harjoituksissa!**)

$$\begin{aligned} E[e_k^2] &= E[a_k^2] - 2\operatorname{Re}\{c^H E[r_k r_k^H]\} + c^H E[r_k r_k^H] c \\ &= E[a_k^2] - 2\operatorname{Re}\{c^H \mathbf{a}\} + c^H \Phi \mathbf{c} \end{aligned} \quad (11.8)$$

- ◆ missä yläindeksi 'H' merkitsee *hermitointia* eli transponointia ja konjugointia. Lisäksi määritellään *ristikorrelaatiovektori*

$$\mathbf{a} = E[a_k r_k^H] \quad (11.9)$$

- ◆ ja *autokorrelaatiomatriisi*

$$\Phi = E[r_k r_k^H] = \begin{bmatrix} \Phi_0 & \Phi_{-1} & \dots & \Phi_{-(N-1)} \\ \Phi_1 & \Phi_0 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Phi_{N-1} & \dots & & \Phi_0 \end{bmatrix} \quad (11.10)$$

21.10.1998

Teletekniikan laboratorio

Sivu 9

Autokorrelaatiomatriisi



- ◆ **Autokorrelaatiomatriisilla** on tärkeitä ominaisuuksia:

- 1) on *Hermiten (hermiittinen) matriisi*, eli $\Phi^H = \Phi^{T*} = \Phi$ (jos Φ on reallinen, se on symmetrinen).
- 2) on *Töplitz-matriisi* eli diagonaalin suuntaisilla alidiagonaaleilla on sama elementti. *Autokorrelaatiofunktion* arvo riippuu siis vain korreloitavien viive-erosta: $\Phi_j = E[r_{k+j} r_k^*]$
- 3) on *positiivi-semidefiniitti* eli mille tahansa vektorille \mathbf{x} $\mathbf{x}^H \Phi \mathbf{x}$ on positiivinen ja on siten tulkittavissa *neliölliseksi pituusmitaksi*.

21.10.1998

Teletekniikan laboratorio

Sivu 10

5

Optimaalinen MMSE-ratkaisu



- ◆ Tarkastellaan kaavan (11.8) neliövirhelauseketta kun FIR-suotimen pituus on 1 ja signaalit ovat reaaliarvoisia. Saadaan

$$\begin{aligned} E[e_k^2] &= E[a_k^2] - 2ac + \Phi_0 c^2 \\ a &= E[a_k r_k], \quad \Phi_0 = E[r_k^2] \end{aligned} \quad (11.14)$$

- ◆ Tämä voidaan helposti täydentää muotoon

$$\begin{aligned} E[e_k^2] &= E[a_k^2] - a^2 / \Phi_0 + \Phi_0 (a^2 / \Phi_0^2 - 2ac / \Phi_0 + c^2) \\ &= E[a_k^2] - a^2 / \Phi_0 + \Phi_0 (c - a / \Phi_0)^2 \end{aligned}$$

josta nähdään että MSE:n minimoiva ratkaisu c :lle on ...

21.10.1998

Teletekniikan laboratorio

Sivu 11

...Optimaalinen MMSE-ratkaisu



- ◆ Tämä yksinkertainen tulos on voidaan yleistää kompleksiseen vektoritapaukseen:

LM Harj. 11-4 Johda kertomalla auki, että

$$E[e_k^2] = E[a_k^2] - \mathbf{a}^H \Phi^{-1} \mathbf{a} + (\Phi^{-1} \mathbf{a} - \mathbf{c})^H \Phi (\Phi^{-1} \mathbf{a} - \mathbf{c}) \quad (11.15)$$

on yhtäpitävä (11.8:n kanssa).

- ◆ Koska Φ on positiivi-semidefiniitti, kaavan (11.15) viimeinen termi on aina ei-negatiivinen eli pienimmillään nolla. Optimiratkaisu saadaan siis valitsemalla

$$\mathbf{x} = \Phi^{-1} \mathbf{a} - \mathbf{c} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{c}_{\text{opt}} = \Phi^{-1} \mathbf{a} \quad (11.16)$$

- ◆ Ratkaisu (jos se on olemassa) on aina *yksikäsitteinen*.

21.10.1998

Teletekniikan laboratorio

Sivu 12

6

...Optimaalinen MMSE-ratkaisu



- ◆ Edelläsaatu ratkaisu (11.16) minimoi lausekkeen (11.15) MSE:n, sillä muut termit eivät riipu kerroinvektorista \mathbf{c} . Minimim-MSE:ksi saadaan

$$\xi_{\min} = E[|a_k|^2] - \mathbf{a}^H \Phi^{-1} \mathbf{a} = E[|a_k|^2] - \mathbf{a}^H \mathbf{c}_{opt} \quad (11.17)$$

- ◆ MSE:n yleinen kaava saadaan siis muotoon

$$E[|e_k|^2] = \xi_{\min} + (\Phi^{-1} \mathbf{a} - \mathbf{c})^H \Phi (\Phi^{-1} \mathbf{a} - \mathbf{c}) \quad (11.18)$$

- ◆ MSE riippuu suoraan siitä, kuinka lähellä \mathbf{c} on optimia. MSE:n kuvaaja on (*hyper*)paraboloidi N -ulotteisessa avaruudessa.
- ◆ Optimiratkaisu (11.16) voidaan johtaa myös *derivoimalla* MSE:n lauseke vektorin \mathbf{c} suhteen ja asettamalla derivaatta nolllaksi (ks. kirjan **Harj. 11-5**). Tulos on tietysti sama.

21.10.1998

Teletekniikan laboratorio

Sivu 13

MSE-gradienttialgoritmi (LM 11.1.3)



- ◆ Kaavan (11.16) optimikerroinvektori löydetään *matriisinkäännöllä* eli ratkaisemalla lineaarinen yhtälöryhmä joka riippuu autokorrelaatiomatriisin Φ termeistä (autokorrelaatiofunktion Φ_j arvoista) ja ristikorrelaatiovektorista \mathbf{a} . Jos kerroinvektoria joudutaan päivittämään usein (niinkuin oletetaan), se on työläs tapa, ja lisäksi siinä voi tulla numeerisia (laskentatarkkuus-)ongelmia.
- ◆ Lisäksi autokorrelaatio- ja ristikorrelaatiotermit täytyy tuntea (tai estimoida).

21.10.1998

Teletekniikan laboratorio

Sivu 14

7

...MSE-gradienttialgoritmi



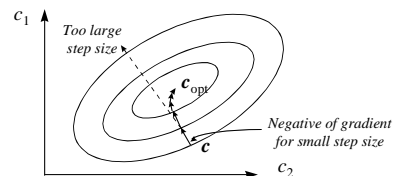
- ◆ Suoran ratkaisun sijasta etsimme *iteratiivista* algoritmia, joka vähitellen lähestyy optimiratkaisua. Ratkaisu perustuu siihen perustulokseen että optimikerroinvektori on *yksikäsitteinen ja virhepinta* (MSE:n kuvaaja kerroinvektoriavaruudessa) on *unimodaalinen*, eli sillä on vain yksi globaali minimi (ei paikallisia ääriarvoja!).
- ◆ Tällöin voidaan MSE-käyrää pitkin edetä aina negatiivisen gradientin suuntaan eli *alamäkeen* optimiratkaisua kohti.

21.10.1998

Teletekniikan laboratorio

Sivu 15

...MSE-gradienttialgoritmi



- ◆ **Kuva 11-3** havainnollistaa gradienttialgoritmin periaatteellista toimintaa (kaksiulotteinen tapaus).

21.10.1998

Teletekniikan laboratorio

Sivu 16

8

...MSE-gradientiaalgoritmi



- ◆ MSE-gradientiaalgoritmi (MSEG) voidaan esittää muodossa

$$\mathbf{c}_{j+1} = \mathbf{c}_j - \frac{\beta}{2} \nabla_{\mathbf{c}_j} E[|e_k|^2] \quad (11.27)$$

- ◆ missä \mathbf{c}_{j+1} ja \mathbf{c}_j ovat uusi ja vanha kerroinvektori, β on askelparametri (1/2 on mukana jotta seuraavat kaavat sievenevät) ja nablalauseke on MSE-virhepinnan gradientti. Derivoimalla MSE:n lauseke saadaan (ks. kirjan **Harj. 11-5**)

$$\nabla_{\mathbf{c}_j} E[|e_k|^2] = 2\Phi\mathbf{c} - 2\mathbf{a} \quad (11.25)$$

- ◆ jolloin algoritmi (11.27) saadaan muotoon

$$\mathbf{c}_{j+1} = \mathbf{c}_j + \beta(\mathbf{a} - \Phi\mathbf{c}_j) = (\mathbf{I} - \beta\Phi)\mathbf{c}_j + \beta\mathbf{a} \quad (11.28)$$

21.10.1998

Teletekniikan laboratorio

Sivu 17

...MSE-gradientiaalgoritmi



- ◆ **Esimerkki 11-2:** tutkitaan taas *reaalista skalaaritapausta (Esim. 11-1)*, jolloin MSEG-algoritmi saadaan muotoon

$$c_{j+1} = (1 - \beta\Phi_0)c_j + \beta a \quad (11.28)$$

- ◆ Vähennetään kummaltakin puolelta optimiratkaisu c_{opt} ja käytetään kaavaa $a = \Phi_0 c_{opt}$:

$$\begin{aligned} c_{j+1} - c_{opt} &= (1 - \beta\Phi_0)c_j - c_{opt} + \beta\Phi_0 c_{opt} \\ &= (1 - \beta\Phi_0)(c_j - c_{opt}) \end{aligned} \quad (11.30a)$$

Kun oletetaan kertoimen alkuarvoksi, voidaan $(j+1)$:s ratkaisu lausua myös muodossa

$$c_{j+1} - c_{opt} = (1 - \beta\Phi_0)^j (c_0 - c_{opt}) \quad (11.30b)$$

21.10.1998

Teletekniikan laboratorio

Sivu 18

9

...MSE-gradientiaalgoritmi



Tästä kaavasta nähdään, että

- ◆ Ratkaisu suppenee *aina* kohti optimia (alkuarvosta riippumatta) jos

$$|1 - \beta\Phi_0| < 1$$

- ◆ Tästä seuraa *askelparametrille* vaatimus

$$-1 < \beta\Phi_0 - 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < \beta\Phi_0 < 2 \Leftrightarrow 0 < \beta < \frac{2}{\Phi_0}$$

- ◆ Nopeimmin algoritmi suppenee jos $\beta = 1/\Phi_0$: tällöin tarvitaan vain yksi iteraatio!

21.10.1998

Teletekniikan laboratorio

Sivu 19

MSEG-algoritmin suppeneminen



- ◆ Edellisen esimerkin tulos voidaan yleistää kompleksiarvoiseen vektoritapaukseen. Esitetään kaava (11.28) muodossa

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{j+1} - \mathbf{c}_{opt} &= (\mathbf{I} - \beta\Phi)\mathbf{c}_j - \mathbf{c}_{opt} + \beta\Phi\mathbf{c}_{opt} \\ &= (\mathbf{I} - \beta\Phi)(\mathbf{c}_j - \mathbf{c}_{opt}) \end{aligned}$$

- ◆ Merkitsemällä $\mathbf{q}_j = \mathbf{c}_j - \mathbf{c}_{opt}$ ja käyttämällä alkuarvoa \mathbf{q}_0 saadaan ratkaisu muotoon

$$\mathbf{q}_{j+1} = (\mathbf{I} - \beta\Phi)^j \mathbf{q}_0 \quad (11.32)$$

- ◆ Mutta milloin algoritmi suppenee? Nyt sen selvittäminen on hieman työlämpää kuin skalaaritapauksessa ja matriisin ominaisarvoja ja -vektoreita tarvitaan.

21.10.1998

Teletekniikan laboratorio

Sivu 20

10

...MSEG-algoritmin suppeneminen



- ◆ Kaavan (11.32) kerroinmatriisi voidaan esittää modaaliyhajotelmana

$$(\mathbf{I} - \beta\Phi)^j = \sum_{i=1}^N (1 - \beta\lambda_i)^j \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \quad (11.38)$$

- ◆ missä λ_i on matriisin Φ ominisarvo (aina reaalin ja ei-neg.!) ja \mathbf{v}_i vastaava ominaisvektori ($\mathbf{v}_i^H \mathbf{v}_i = 1$). Termi $(1 - \beta\lambda_i)^j$ on lausekkeen (11.38) i :s suppenemismoodi.
- ◆ Jotta jokainen moodi suppenisi, on vaadittava että suurinta ominisarvoa vastaava moodi suppenee, mistä seuraa askelparametrin suppenemisehto

$$0 < \beta < \frac{2}{\lambda_{\max}} \quad (11.39)$$

21.10.1998

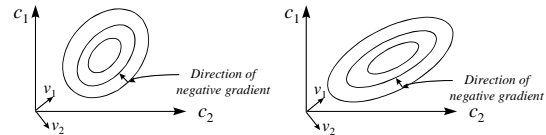
Teletekniikan laboratorio

Sivu 21

...MSEG-algoritmin suppeneminen



- ◆ Voidaan lisäksi osoittaa, että suppeneminen on hidasta kun ns. ominisarvohaje $\lambda_{\max} / \lambda_{\min}$ (suurimman ja pienimmän ominisarvon suhde) on suuri.
- ◆ Käytännössä suuri ominisarvohaje ilmenee siten, että MSE-pinnan (hyper)paraboloidin poikkipinta on litistynyt (hyper)ellipsi. Tällöin *gradienttisuunta kääntyy voimakkaasti edettäessä kohti maljan pohjaa*, jolloin on pakko käyttää pienehköä askelparametria ettei ajeta ohi. **Kuva 11-6:**



21.10.1998

Teletekniikan laboratorio

Sivu 22

11

Ominisarvot ja tehospektri



- ◆ Vieläkin havainnollisempi on spektritulkinta. Voidaan osoittaa, että signaalin tehospektri asettaa rajat ominisarvohajeelle:

$$\min_{\omega} [S(e^{j\omega})] < \lambda < \max_{\omega} [S(e^{j\omega})] \quad (11.45)$$

ja tehospektrihän on *autokorrelaatiofunktion Fourier-muunnos*:

$$S(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_k e^{-j\omega k} \quad (11.46)$$

- ◆ Ominisarvot riippuvat matriisin dimensioista. Voidaan osoittaa, että ominisarvojen minimi ja maksimi lähestyvät (11.45):n raja-arvoja kun matriisin kokoa (eli adaptoitavan suotimen pituutta) kasvatetaan.

21.10.1998

Teletekniikan laboratorio

Sivu 23

...Ominisarvot ja tehospektri



- ◆ Suppenemisen kannalta on siten parasta, että korjaimen input-signaalin spektri on mahdollisimman tasainen (lähellä valkoista kohinaa). Jos spektrissä on yksikin nollakohta, suppeneminen hidastuu periaatteessa nollian kun suotimen pituutta kasvatetaan.
- ◆ Käytännön pohjakohinan takia tämä on lähinnä teoreettinen ongelma. Silti *pitkien suotimien adaptointi on hidasta* varsinkin kun signaalin spektri on vaihteleva.

21.10.1998

Teletekniikan laboratorio

Sivu 24

12

Yhteenveto 6. luennosta



Tällä luennolla käsiteltiin FIR-korjaimen adaptointia. Tutustuttiin mm. seuraaviin käsitteisiin

- ◆ MSE-virheen lauseke *matrisimuodossa* N -pituiselle FIR-suotimelle
- ◆ MSE-gradientialgoritmi (MSEG)
- ◆ MSEG-algoritmin suppeneminen
- ◆ Askelparametrin määrittäminen
- ◆ Ominaisarvohaje, tehospektri ja suppeneminen