Helsinki University of Technology
Laboratory of Telecommunications Technology

S-38.211 Signaalinkäsittely tietoliikenteessä I
Signal Processing in Communications (2 ov)

Syksy 1998

5. Luento: Kanavakorjaimet II

prof. Timo Laakso
Vastaanotto torstaisin klo 10-11
Huone G210, puh. 451 2473
Sähköposti: timo.laakso@hut.fi

Yleistetyt kanavakorjaimet (LM 10.2)

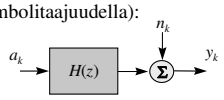
- Viimeksi käsiteltiin nollaanpakottavaa (ZF) korjainratkaisua olettaen valkaistu sovitettu suodatin (WMF) -esiaste. Seuraavassa tarkastellaan yleisempiä ratkaisuja jotka ovat lähempänä käytännön toteutusta:
- *Luovutaan kiinteästä WMF-esiasteesta*. Käytännössä WMF on hankala toteuttaa, koska se vaatii tarkan tiedon kanavasta.
- *Muutetaan optimaalisuuskriteeriä*. ISI:n ehdottoman nollaanpakotuksen sijasta sallitaan hieman ISIä jotta ZF-korjaimen pulmallista kohinavahvistusta voidaan pienentää. Sopiva käytännön kriteeri on *keskimääräinen kokonaisneliövirhe* (Mean Square Error, MSE) joka sisältää kohinan ja ISIn yhteisvaikutuksen.

...Yleistetyt kanavakorjaimet

- Tarkastellaan *rajatun kompleksisuuden korjaimia*. Edellä tarkasteltiin vain yleisiä siirtofunktioita rajoittamatta niiden astelukua.
- Käytännössä korjaimet ovat yleensä *rajallisen pituisia FIR-suotimia*, koska niiden kertoimien adaptiivinen määrittäminen on helpointa käytännön järjestelmissä.

Järjestelmämalli (LM 10.2.1)

- Tarkastellaan **Kuvan 10-11** diskreettiaikaista mallia (näytteytys symbolitaajuudella):



- jossa $H(z)$ on yhdistetty lähetyspulssin ja kanavavasteen siirtofunktio. Symbolisekvenssi ja kohinasekvenssi oletetaan kompleksiarvoisiksi stokastisiksi prosesseiksi joilla on seuraavat tehospektrit:

$$S_a = A_a^2 G_a G_a^*$$
$$S_n = A_n^2 G_n G_n^*$$

ja G_a, G_n ovat minimivaiheisia kausaalisia moonisia tekijöitä.

...Järjestelmämalli

- Kanavan (+ lähettimen pulssinmuokkauksen) siirtofunktio oletetaan jaettavaksi seuraaviin tekijöihin:

$$H(z) = H_0 z^r H_{\min} H_{\max} H_{\text{zero}}$$

- missä H_0 on vakiokerroin, z^r on viivetermi, $H_{\min}$ on mooninen, kausaalinen ja minimivaiheinen, $H_{\max}$ on mooninen, antikausaalinen ja maksimivaiheinen, ja H_{zero} sisältää yksikköympyrällä sijaitsevat nollat.

Käytännön kanavan ominaisuuksia

- Käytännön kanavalla on tiettyjä fysikaalisia rajoituksia maksimivaiheisen tekijän $H_{\max}$ suhteen:
- $H_{\max}$ ei voi sisältää napoja, sillä muuten impulssivaste jatkuisi äärettömiin ‘vasemmalle’
- $H_{\max}$ voi sisältää nollia, eli $H_{\max}$ on aina FIR-tyyppinen.

Esimerkki 10-12: Radiokanavan siirtofunktio

- Mobiiliradiokanavalle käytetään yleensä FIR-tyyppistä monitiekanavamallia jossa monitiepolkujen viiveet ja kompleksiset amplitudit muuttuvat (häipyvät) ajan mukana.
- Oletetaan että 2-polkuisen kanavan että monitiepolkujen viive-ero on mT (T = näyteväli). Kanavan impulssivasteeksi ja siirtofunktioksi saadaan

$$c_k = c_1\delta_k + c_2\delta_{k-m}$$
$$C(z) = c_1 + c_2 z^{-m}$$

- Kanavan nollat voidaan ratkaista kaavasta

$$z^m = -\frac{c_2}{c_1}$$

eli jos $|c_2| > |c_1|$, kanava on *maksimivaiheinen*.

...Radiokanavan siirtofunktio

- Koska monitiepolkujen amplitudit yleensä häipyvät riippumatta toisistaan, maksimivaiheinen tilanne on täysin mahdollinen, varsinkin jos suoraan lähettimestä saapuvaa komponenttia (line-of-sight, LOS) ei näköesteen vuoksi ole.
- Korjaimen kannalta *maksimivaiheinen kanava on ongelma*. Koska ideaalinen ZF-korjain on kanavan käänteissiirtofunktio, se sisältää napoja yksikköympyrän ulkopuolella ja on siis epästabiili. Käytännössä tällaista korjainta voidaan vain *approksimoida* stabiililla ratkaisulla.
- Tilanteen tekee vielä hankalammaksi se, että kanava saattaa muuttua edestakaisin minimivaiheisen ja maksimivaiheisen välillä. Tällöin FIR-tyyppinen (ei-rekursiivinen) korjain on yleensä ainoa hallittavissa oleva käytännön toteutusratkaisu.

Neliövirhe

- Määritellään keskimääräinen neliövirhe (Mean square error, MSE) vastaanottimen symboliestimaatin q_k ja lähetetyn symbolin a_k arvon neliön odotusarvona:

$$\varepsilon^2 = E\left[|e_k|^2\right], \quad e_k = q_k - a_k$$

- MSE sisältää yleisesti siis *sekä kohinaa että ISIä*. Tämä tarkoittaa että virhetodennäköisyyttä ei voida määrittää *tarkasti* Q-funktion avulla kuten pelkän kohinan tapauksessa. Approksimaatio voidaan kuitenkin saada määrittelemällä tunnusluku

$$\gamma = \frac{a_{\min}^2}{\varepsilon^2 / 2}$$

...Neliövirhe

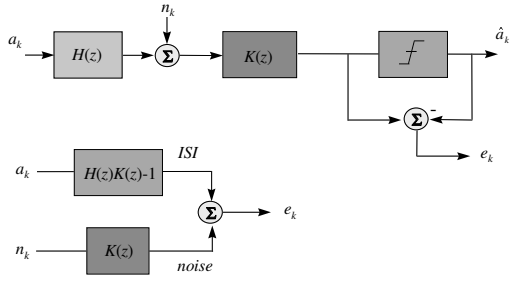
- (puolikas tulee siitä että tarvitaan reaali- tai imaginaariosan varianssi). Virhetn-estimaatti saadaan, kuten aiemmin, kaavasta

$$P_e = K \cdot Q(\sqrt{\gamma}/2)$$

- Tämä virhetn-estimaatti perustuu siihen, että residuaali-ISIä mallitetaan additiivisena Gaussin kohinana (vaikka se on *datariippuva epälineaarinen häiriö*). Kun ISIn teho verrattuna kohinaan on pieni ja se muodostuu usean symbolin keskinäisvaikutuksen summana, approksimaatio on yleensä riittävän hyvä.

Lineaarinen MSE-korjain (LM 10.2.2)

- Tarkastellaan **Kuvan 10-12** korjainrakennetta ($H(z)$=$H_{TC}(z)$ sisältää lähetyssuotimen ja kanavan, $K(z)$ on korjain)



Lineaarinen MSE-korjain

- Virheen e_k *tehospektri* koostuu yleisesti residuaali-ISIstä ja korjaimen $K(z)$ suodattamasta kohinasta:

$$S_e(e^{j\omega}) = S_a(e^{j\omega})\left|H(e^{j\omega})K(e^{j\omega}) - 1\right|^2 + S_n(e^{j\omega})\left|K(e^{j\omega})\right|^2 \quad \text{eli}$$

$$S_e = S_a\left|HK - 1\right|^2 + S_n\left|K\right|^2$$

- ja MSE saadaan integroimalla tehospektri

$$\varepsilon^2 = \frac{T}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} S_e(e^{j\omega})d\omega = \langle S_e \rangle_A$$

- Ennen MMSE-ratkaisun johtamista kerrataan vielä ZF-ratkaisu ja sen ominaisuudet.

LE-ZF-korjain

- Nollaanpakottava korjain on yksinkertaisesti *kanavan käänteissiirtofunktio*:

$$K(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1}{H_0 H_{\min} H_{\max} H_{zero}} \qquad (10.60)$$

- Ominaisuuksia:
  - $K(z)$ riippuu vain kanavasta, ei datan tai kohinan ominaisuuksista
  - MSE riippuu vain kohinasta, koska ISI on nolla
  - Minimivaiheinen osuus kanavasta on helppo korjata käänteissuotimella $1/H_{\min}$
  - maksimivaiheosuus ja nollat johtavat ideaalisti epästabiileihin korjaintermeihin $1/H_{\max}$ ja $1/H_{\text{zero}}$

...LE-ZF-korjain

- LE-ZF-korjaimen MSE on

$$\varepsilon^2_{LE-ZF} = \left\langle \frac{S_n}{|H|^2} \right\rangle_A \qquad (10.61)$$

joka kasvaa äärettömiin maksimivaihekanavan ja yksikköympyränollien tapauksessa.

LE-MSE-korjain

- Yleisen LE-korjaimen virhespektri on muotoa

$$S_e = S_a |HK - 1|^2 + S_n |K|^2 \qquad (10.58)$$

- MSE:n minimoiva korjain voidaan johtaa tämän kaavan avulla. Merkitsemällä (ks. Kuva 10-11)

$$S_y = S_a |H|^2 + S_n \qquad (10.65)$$

- voidaan (10.58) muokata muotoon

$$S_e = S_y \left| K - \frac{S_a H^*}{S_y} \right|^2 + \frac{S_a S_n}{S_y} \qquad (10.66)$$

...LE-MSE-korjain

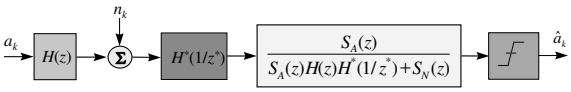
- Koska molemmat termit ovat positiivisia, millä tahansa taajuudella optimaalinen ratkaisu on se joka nollaa ensimmäisen termin. Tämä on siten myös optimaalinen MMSE (Minimum MSE) -ratkaisu, eli LE-MSE-korjaimeksi saadaan

$$K(z) = \frac{S_a H^*}{S_y} = \frac{S_a H^*}{S_a |H|^2 + S_n} = \frac{1}{H + S_n / (S_a H^*)} \qquad (10.67)$$

- Tämä voidaan tulkita nimittäjän lisätermillä *modifioiduksi LE-ZF-korjaimeksi* ($K = 1/H$).

...LE-MSE-korjain

- LE-MSE:n toteutus on **Kuvan 10-13** mukainen:



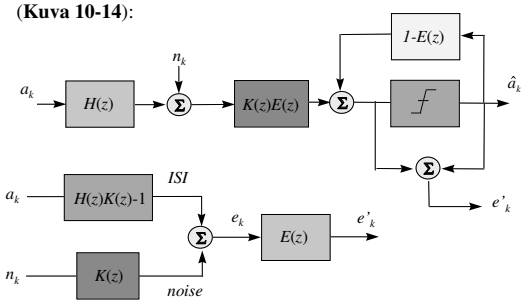
...LE-MSE-korjain

- Tekijä H^* vastaa diskreettiä sovitettua suodatinta ja se voidaan erottaa esiasteeksi. LE-MSE:n ominaispiirteitä on:
  - Esiasteen jälkeinen lohko S_a/S_y on aina reaalinen ja ei-negatiivinen yksikköympyrällä
  - Jos S_a/S_y :llä on napoja, osa näistä on yksikköympyrän ulkopuolella mikä tekee tarkan toteutuksen mahdottomaksi
  - Kun kohinaspektri S_n pienenee, LE-MSE lähestyy LE-ZF-ratkaisua (kohinan merkitys vähenee ja ISIn kasvaa)
  - LE-MSE-korjaimen MSE on (vrt. (10.61)!):

$$\varepsilon^2_{LE-MSE} = \left\langle \frac{S_n}{|H|^2 + S_n / S_a} \right\rangle_A \qquad (10.68)$$

DFE-ZF-korjain

- DFE-ZF-korjain voidaan johtaa mm. prediktoritulkinnan avulla (**Kuva 10-14**):



...DFE-ZF-korjain

- *Prediktorisuodin* $E(z)$ valkaisee virheen e_k tehospektrin S_E. Koska prediktorisuodin määritellään lisäksi minimivaiheiseksi ja mooniseksi, se voidaan esittää muodossa

$$E(z) = \frac{1}{G_e}$$

missä G_e saadaan hajotelmasta

$$S_e = \varepsilon^2_{DFE} G_e G_e^* \qquad (10.71)$$

- Koska LE-ZF:n korjain on $K = 1/H$, virheen e_k tehospektri on

$$S_e = \frac{S_n}{HH*} = \frac{A_n^2 G_n G_n^*}{|H_0|^2 H_{\min} H_{\max} H^*_{\min} H^*_{\max}} \qquad (10.73)$$

...DFE-ZF-korjain

- Vertaamalla (10.71):a ja (10.73):a saadaan

$$G_e = \frac{G_n}{H_{\min} H_{\max}^*}$$

ja *prekursorikorjain* on siis

$$E(z) = \frac{1}{G_e} = \frac{H_{\min} H_{\max}^*}{G_n}$$

- Tästä saadaan *prediktiovirhesuotimen* siirtofunktio

$$K(z)E(z) = \frac{1}{HG_e} = \frac{H_{\min} H_{\max}^*}{H_0 H_{\min} H_{\max} G_n} = \frac{H_{\max}^*}{H_0 H_{\max} G_n}$$

...DFE-ZF-korjain

- Havaintoja prekursorikorjaimesta:
  - $1/G_e$ on minimivaiheinen *kohinanvalkaisusuodin*
  - $H_{\max}^*/H_{\max}$ on *allpass-suodin* (amplitudivaste = 1 kaikilla taajuuksilla). Eliminoi prekursori-ISIä muuttamalla *vaihetta,* jolloin kohinankaan *amplitudi* ei kasva!
  - Jos kanava on minimivaiheinen, $H_{\max} = 1$. Jos lisäksi kohina on valkoista eli $S_e = G_e = 1$, koko prekursoria ei tarvita!
  - Kanavan maksimivaihekomponentti voi olla vain FIR-tyyppinen, muuten toteutus ei onnistu!
  - MSE:

$$\varepsilon_{DFE}^2 = \left\langle S_e / |H|^2 \right\rangle_G$$

DFE-MSE-korjain

- DFE-MSE-korjain toteutetaan myös **Kuvan 10-14** rakenteella, mutta siirtofunktiot $E(z)$ ja $K(z)E(z)$ määritetään *MSE-kriteerin* mukaisesti.
- Tehdään ensin hajotelma (10.65):lle:

$$S_y = S_a |H|^2 + S_n = A_y^2 G_y G_y^* \qquad (10.81)$$

$$A_y^2 = \left\langle S_a |H|^2 + S_n \right\rangle_G \qquad (10.82)$$

$K(z)$:n MSE-ratkaisu on sama kuin LE-MSE:lle eli $K = S_a H^*/S_y$, jolloin virhespektri on (10.66):sta

$$S_e = \frac{S_a S_n}{S_y} = \frac{A_a^2 G_a G_a^* \cdot A_n^2 G_n G_n^*}{A_y^2 G_y G_y^*} = \varepsilon_{DFE-MSE}^2 G_e G_e^*$$

...DFE-MSE-korjain

- Termejä vertaamalla saadaan ratkaistua *prediktori*

$$E(z) = \frac{1}{G_e} = \frac{G_y}{G_a G_n}$$

ja *prekursori*

$$K(z)E(z) = \frac{S_a H^*}{S_y G_e} = \frac{A_a^2 G_a G_a^*}{A_y^2 G_y G_y^*} \cdot \frac{H^* \cdot G_y}{G_a G_n} = \frac{A_a^2 G_a^*}{A_y^2 G_y^*} \cdot \frac{H^*}{G_n}$$

Lauseke on hankala, mutta onneksi tätä ei tarvita käytännön korjaimien suunnittelussa!

FIR-korjaimet (LM 10.4)

- Tähän asti ei ole juuri mietitty korjaimien kompleksisuutta. Kaikki diskreeteillä suotimilla toteutettavat siirtofunktiot ovat *rationaalisia*. Käytännön kanavat ovat harvoin tarkasti rationaalisia, mutta riittävän asteluvun z-rationaalipolynomilla eli äärellisen asteisella rekursiivisella (IIR-) suotimella niitä voidaan approksimoida.
- IIR-suotimien potentiaalisena ongelmana on *epästabiilisuus* (navat yksikköympyrän ulkopuolella). Edellä huomattiin, että *maksimivaiheisen* kanavan tarkka ekvalisointi voi johtaa epästabiiliin korjaimeen. Tällöin on parasta tyytyä approksimatiiviseen FIR-ratkaisuun.

...FIR-korjaimet

- Lisäksi IIR-korjaimien adaptointi tuntemattomaan tai muuttuvaan kanavaan on (ainakin nykyään tunnetuilla tekniikoilla) käytännössä *paljon* hankalampaa kuin FIR-korjaimien. Tämän vuoksi käytetään yleensä aina FIR-korjaimia niiden vaatimasta korkeammasta asteluvusta huolimatta.
- Käytännön korjainratkaisuissa *ZF-kriteerin* käyttö on kyseenalaista, sillä äärellisen asteluvun FIR-suodin (tai IIR-suodin) ei yleensä pysty poistamaan ISIä kokonaan.
- Pääsääntöisesti käytetäänkin *MMSE-kriteeriä* ja sen pohjalta johdetaan adaptiivisia FIR-tyyppisiä korjainratkaisuja kirjan luvussa 11.