Helsinki University of Technology
Laboratory of Telecommunications Technology

S-38.211 Signaalinkäsittely tietoliikenteessä I
Signal Processing in Communications (2 ov)

Syksy 1998

4. Luento: Kanavakorjaimet I

prof. Timo Laakso
Vastaanotto torstaisin klo 10-11
Huone G210, puh. 451 2473
Sähköposti: timo.laakso@hut.fi

Miksi lineaarisia kanavakorjaimia?

- Viimeksi käsiteltiin optimaalista sekvenssin vastaanottoa (MLSD) ja sen (approksimatiivista) toteutusta Viterbi-algoritmilla
- MLSD ja Viterbi ovat *epälineaarisia datariippuvia* algoritmeja
- Viterbi-algoritmin käyttö on kuitenkin hankalaa kun
  - Kanavan impulssivaste on pitkä (kompleksisuus)
  - Kanava muuttuu nopeasti (kanavan estimointi vaikeaa, eikä pysy samana sekvenssin pituuden ajan)
- Optimaalinen *lineaarinen* vastaanotin (korjain) on usein helpompi toteuttaa ja takaa riittävän hyvän suorituskyvyn

Kanavakorjaimet

Tällä luennolla tutustumisen kohteena ovat

- Lineaarinen nollaanpakottava korjain (linear zero-forcing equalizer, LE-ZF)
- Takaisinkytketty nollaanpakottava korjain (decision-feedback zero-forcing equalizer, DFE-ZF)
- Tomlinson-Harashima -esikoodaus

Seuraavalla luennolla jatketaan aiheena

- Lineaarinen neliövirhekorjain (linear mean squared error equalizer, LE-MSE)
- Takaisinkytketty neliövirhekorjain (decision-feedback MSE equalizer, DFE-MSE)

Myöhemmin tarkastellaan *korjaimien adaptiivisia toteutuksia*

Z-siirtofunktioista

Tarkastellaan yleistä stabiilia rationaalista z-siirtofunktiota $H(z)$ joka voi olla esim. kanavan diskreettiaikainen malli. On usein hyödyllistä esittää se seuraavanlaisena hajotelmana

$$H(z) = B \cdot z^{L} \cdot H_{\min}(z) H_{\max}(z) H_{\text{zero}}(z) \qquad (2.44)$$

missä

- B on vakiokerroin
- L on vakioviive
- H_{min} on *minimivaiheinen* tekijä
- H_{max} on *maksimivaiheinen* tekijä ja
- H_{zero} sisältää yksikköympyrällä olevat nollat.

- *Minimivaiheinen* tekijä on muotoa

$$H_{\min}(z) = \frac{\prod_{k=1}^{M}\left(1-c_k z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1-d_k z^{-1}\right)}, \quad |c_k| \le 1, \quad |d_k| < 1 \qquad (2.45)$$

eli nollat ja navat ovat yksikköympyrän *sisä*puolella.
Maksimivaiheisen tekijän nollat ja navat ovat vastaavasti yksikköympyrän *ulko*puolella, eli

$$H_{\max}(z) = \frac{\prod_{k=1}^{I}\left(1-f_k z\right)}{\prod_{k=1}^{J}\left(1-g_k z\right)}, \quad |f_k| \le 1, \quad |g_k| < 1 \qquad (2.47)$$

ja yksikköympyränollatermi on muotoa

$$H_{\text{zero}}(z) = \prod_{k=1}^{K}\left(1-e_k z\right), \quad |e_k| = 1 \qquad (2.46)$$

- *Heijastettu siirtofunktio*: Jos sekvenssin h_k z-muunnos on muotoa

$$H(z) = Az^{r}\frac{\prod_{k=1}^{M}\left(1-c_k z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1-d_k z^{-1}\right)} \qquad (2.33)$$

niin sekvenssin h_k* (peilattu ja *konjugoitu* - tämä on kompleksi arvoisen sekvenssin sovitettu suodatin!) z-muunnos on

$$H^*(1/z^*) = Az^{-r}\frac{\prod_{k=1}^{M}\left(1-c_k^* z\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1-d_k^* z\right)} \qquad (2.51)$$

- Z-siirtofunktiosta päästään taajuustason esitykseen (spektriin) pysymällä yksikköympyrällä $z=e^{j\omega T}$ (ω kulmataajuus, T näyteväli):

$$H(e^{j\omega T}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega T}}$$

- *Heijastetun siirtofunktion* spektri saadaan suoraan konjugoimalla alkuperäisen sekvenssin spektri:

$$H^*(1/z^*)\Big|_{z=e^{j\omega T}} = H^*(e^{j\omega T})$$

eli pätee

$$H(z)H^*(1/z^*)\Big|_{z=e^{j\omega T}} = \left|H(e^{j\omega T})\right|^2$$

- Tarkastellaan amplitudiltaan *normaalijakautunutta* mutta *värillistä* kohinaa n_k jolla on (z-tason) tehospektri $S_n(z)$. Tehospektri on aina ei-negatiivinen yksikköympyrällä $z=e^{j\omega}$:

$$S_n(e^{j\omega T}) = \left|H(e^{j\omega T})\right|^2$$

z-tason tehospektri voidaan *aina* esittää hajotelmana

$$S_n(z) = A_n^2 G_n(z) G_n^*(1/z^*)$$

missä A_n on skaalausvakio ja $G_n(z)$ on *minimivaiheinen*:

$$G_n(z) = \frac{\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-c_k z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-d_k z^{-1}\right)}, \quad |c_k| \le 1, \quad |d_k| < 1$$

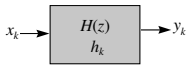
Värillinen kohina

- $G_n(z)$ on lisäksi *mooninen*, eli sen sarjakehitelmän termin z^{-0} kerroin on skaalattu ykköseksi
- $G_n(z)$:n *navat ja nollat ovat yksikköympyrän sisällä* ja suodinta vastaava stabiili impulssivaste on *kausaalinen*. $G_n^*(1/z^*)$:n stabiili impulssivaste on tämän peilikuva ja siis *antikausaalinen*. Yksikköympyrällä pätee lisäksi

$$S_n(e^{j\omega}) = \left|A_n G_n(e^{j\omega})\right|^2$$

- Oletetaan että nollia ei ole yksikköympyrällä. Tällöin myös $1/G_n(z)$ on kausaalinen ja stabiili.

Tehospektrin muokkaus



- Kun diskreetti signaali x_k (tehospektri $S_x(z)$) suodatetaan lineaarisella suotimella $H(z)$ (impulssivaste h_k), suotimen ulostulon spektri on

$$S_y(z) = H(z)H^*(1/z^*)S_x(z)$$

$$S_y(e^{j\omega T}) = \left|H(e^{j\omega T})\right|^2 S_x(e^{j\omega T})$$

- Kun halutaan muokata signaalin tehospektriä, on löydettävä (jokin) siirtofunktio $H(z)$ joka johtaa haluttuun spektriin
- Lyhennysmerkintä: $H(z)H^*(1/z^*) \equiv \left|H(z)\right|^2$

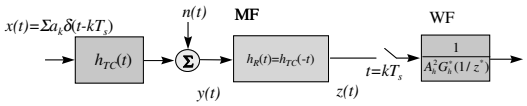
Valkaiseva suodatin

- Suoritetaan edellä käsitellyn värillisen kohinasekvenssin n_k *valkaisu*: Suodatetaan *minimivaiheisella tekijällä* $1/A_nG_n$:llä
- Suodatetun kohinan $n1_k$ tehospektriksi saadaan

$$S_{n1}(e^{j\omega T}) = \left|\frac{1}{A_n G_n(e^{j\omega T})}\right|^2 S_n(e^{j\omega T}) = \frac{S_n(e^{j\omega T})}{\left|A_n G_n(e^{j\omega T})\right|^2} = 1$$

- Spektri on siis vakio eli kohina on *valkoista*, niinkuin pitikin
- Myös *maksimivaiheisella* tekijällä suodattaminen antaa saman tehospektrin, koska tehospektri ei huomioi signaalin vaihetta.

Valkaistu sovitettu suodatin (WMF)



- Sovitetun suotimen (MF) ulostulokohinan valkaisu:
- Kohinan tehospektri on

$$S_{n1}(z) = \left|H_{TC}(z)\right|^2 S_n(z) = A_h^2 G_h(z) G_h^*(1/z^*) N_0$$

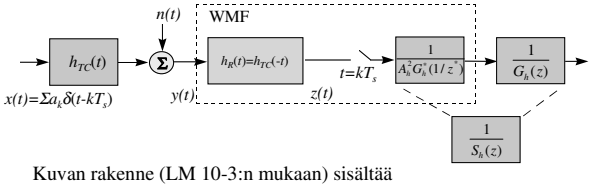
- Suodatetaan *maksimivaihetekijän* käänteissiirtofunktiolla (syy korjaintoteutuksessa, palataan myöhemmin!)

$$WF = \frac{1}{A_h^2 G_h^*(1/z^*)}$$

Nollaanpakottava korjain

- Nollaanpakottavan korjaimen idea on yksinkertainen: valitaan sellainen vastaanottosuodatin joka kumoaa kanavan aiheuttaman lineaarisen vääristymän ja *pakottaa keskinäisvaikutuksen nollaksi*
- Suodattimessa voidaan käyttää WMF-suodinta esiasteena, tai olla käyttämättä. Katsotaan molemmat tapaukset.
- Oletukset:
  - diskreetti signaali (näytteytys symbolitaajuudella)
  - ekvivalentti diskreetti kanava on kausaalinen
  - ekvivalentti diskreetti kohina on valkoista Gaussin kohinaa

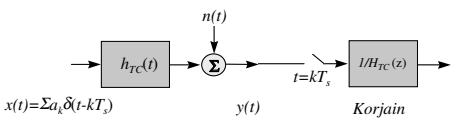
...Nollaanpakottava korjain



Kuvan rakenne (LM 10-3:n mukaan) sisältää

- yhdistetyn lähetys- ja kanavasuotimen $h_{TC}(t) = h_T(t)*c(t)$
- AWGN-kohinalähteen $n(t)$
- sovitetun suotimen $h_R(t) = h_{TC}(-t)$ (reaaliarvoinen!)
- diskreetin valkaisusuotimen $1/ A_h^2 G_h^*(1/z^*)$
- kanavakorjaimen jälkiosan $1/ G_h(z)$

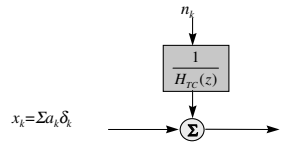
...Nollaanpakottava korjain



Edellinen kuva on sekava, koska WMF-esiaste monimutkaistaa asioita! Tässä yksinkertaisempi rakennekuva, jossa on:

- yhdistetty lähetys- ja kanavasuodin $h_{TC}(t) = h_T(t)*c(t)$
- AWGN-kohinalähde $n(t)$
- kanavakorjain $1/H_{TC}(z)$, joka on näytteistetyn lähetys- ja kanavasuotimen *käänteissuodin*

...Nollaanpakottava korjain



Molemmat edelliset osittain jatkuva-aikaiset järjestelmämallit voidaan pelkistää ylläolevan diskreettiin malliin (modifioitu kuvasta LM 10-3) joka sisältää

- diskreetin AWGN-kohinalähteen n_k
- kohinanvärjäyssuotimen $1/H_{TC}(z)$, joka on suoraan korjaimen siirtofunktio

Nollaanpakotuskorjaimen ominaisuuksia

- Korjaimen lähdössä signaalinäytteet ovat samat kuin lähettimessä (ei ISIä). *Kohinaspektri* on sensijaan muuttunut:

$$S_V(z) = \frac{N_0}{S_h(z)} = \frac{N_0}{|H_{TC}(z)|^2}$$

(Huom. tässä reaaliarvoinen kohina toisin kuin kirjassa => kakkonen häviää)

- Mitä tapahtuu kun lähetin-kanavan taajuusvasteessa on nollia (tai muuten vain voimakasta vaimennusta)?
- Lineaarisen nollaanpakottavan korjaimen ongelma on juuri *kohinan vahvistuminen*

Esimerkki LM 10-5

- Tarkastellaan jatkuva-aikaista vastaanotettua pulssia

$$h_{TC}(t) = \sigma_h\sqrt{2a}e^{-at}u(t)$$

(Esimerkistä 7-10). Diskreetin sekvenssin *autokorrelaatiofunktioksi* saadaan

$$\rho_h(k) = \sigma_h^2\alpha^{|k|}, \quad \alpha = e^{-aT}$$

- Tämän z-muunnoksella saadaan pulssin *tehospektriksi*

$$S_h(z) = |H_{TC}(z)|^2 = \frac{\sigma_h^2(1-\alpha^2)}{(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)}$$

...Esimerkki LM 10-5

- Käänteissuotimen tehospektri on siis

$$S_h^{-1}(z) = \frac{(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)}{\sigma_h^2(1-\alpha^2)} = \frac{1+\alpha^2-\alpha(z^{-1}+z)}{\sigma_h^2(1-\alpha^2)} \qquad (10.32)$$

- Kohinan varianssi saadaan tehospektrin integraalina (= aritm. keskiarvo!)

$$\sigma_v^2 = N_0\left\langle S_h^{-1}(z)\right\rangle_A = \frac{N_0}{\sigma_h^2}\cdot\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}$$

- Mitä tapahtuu kun parametri α lähestyy ykköstä?

Esimerkki LM 10-6

- Nyt oletetaan kanavassa vääristyneeksi pulssimuodoksi $h_{TC}(t) = h_0(t) + \alpha h_0(t - T)$ (Esimerkistä 7-11; pulssin $h_0(t)$ energia $=\sigma_0^2$). Nyt kanava on kaksitappinen FIR ja sen tehospektri on $S_h(z) = \frac{(1+\alpha z^{-1})(1+\alpha z)}{\sigma_h^2(1+\alpha^2)}$

eli edellisen kanavan *käänteisarvo*. Käänteissuotimen tehospektri on nyt muotoa

$$S_h^{-1}(z) = \frac{1+\alpha^2}{\sigma_h^2}\cdot\frac{1}{(1+\alpha z^{-1})(1+\alpha z)}$$

(HUOM! Kirjan kaavassa merkkivirhe!) Kohinan varianssi on:

$$\sigma_v^2 = N_0\left\langle S_h^{-1}(z)\right\rangle_A = \frac{N_0}{\sigma_h^2}\cdot\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}$$

- Eli sama kuin edellä! Johtopäätökset?
- Napa tai nolla kanavassa yhtä haitallinen korjaimen kannalta!

Päätöstakaisinkytketty korjain

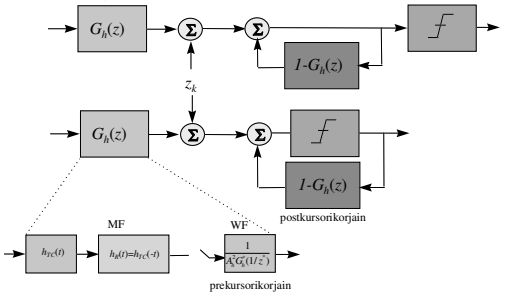
- Edellä tarkasteltiin lineaarista nollaanpakottavaa korjainta. Sen perusongelma on *kohinavahvistus* joka johtuu tarvittavasta käänteissiirtofunktiosta (rekursiivinen osa)
- Uuden korjainrakenteen löytämiseksi muokataan WMF:n jälkeistä osaa seuraavasti:

$$\frac{1}{G_h(z)} = \frac{1}{1-(1-G_h(z))}$$

- Tämä voidaan toteuttaa takaisinkytkentärakenteella jonka takaisinkytkentäsilmukassa on siirtofunktio (1-$G_h(z)$).
- Modifioitu rakenne on esitetty **Kuvassa 10-4a**:

...Päätöstakaisinkytketty korjain

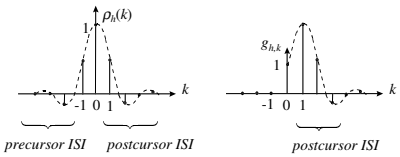
- **LM Kuva 10-4(a,b)**: Päätöstakaisinkytketyn korjaimen johto (Huom! $G_h(z)$ sis. lähetyspulssin, kanavan ja WMF:n, Kuva 10-3)



...Päätöstakaisinkytketty korjain

Pulssimuodot ed. kuvan rakenteessa

1) MF:n jälkeen: 2) WF:n jälkeen:



- Kuvan 10-4 rakenteessa voidaan erottaa *prekursori-* ja *postkursori*suodatin. Prekursori suodattaa tulevia symbolinäytteitä ja poistaa niistä ISIä (*precursor ISI*, "esi-ISI"), kun taas postkursori poistaa vanhojen symbolien aiheuttamaa ISIä (*postcursor ISI*, "jälki-ISI") - ja vahvistaa samalla kohinaa!

...Päätöstakaisinkytketty korjain

- *Prekursori* (= valkaisusuodatin) kompensoi 'ei-kausaalisen' osan pulssin vasteesta, sen takia se on *maksimivaiheinen*
- *Postkursori* perustaa ISIn poiston prekorsorin antamiin "pehmeisiin päätöksiin" jotka sisältävät kohinaa => kokeillaan päätöksenteon varhentamista takaisinkytkentäsilmukan sisälle!
  - Rakenne on stabiili ja kausaalinen koska $G_h(z)$ on *minimivaiheinen* (kun ei nollia yksikköympyrällä).
  - Ei viiveetöntä takaisinkytkentäsilmukkaa, koska $G_h(z)$ on *mooninen* ja (1- $G_h(z)$) sisältää siten aina yhden viiveen

...Päätöstakaisinkytketty korjain

- Saatu rakenne on päätöstakaisinkytketty korjain (Decision-Feedback Equalizer, DFE), jonka perusidean esitti Austin 1967 (ks. **Kuva 10-4b**)
- DFE-ZF:n toiminta:
  - Kohinaton tapaus: ei muutosta lin. korjaimen toimintaan
  - Kohinainen tapaus: päätöksenteko leikkaa kohinan ja eliminoi sen vahvistumisen takaisinkytkentäsilmukassa

...Päätöstakaisinkytketty korjain

- DFE-rakenteen suorituskyky määräytyy päätöksenteon inputin kohinatehosta, joka on sama kuin precursor-osan (WMF) ulostulokohina:

$$\sigma_v^2 = N_0 A_h^2$$

- DFE-korjain sijoittuu suorituskyvyltään lineaarisen korjaimen ja Viterbi-ilmaisimen (MLSD) väliin. Toteutus ei ole juuri LE-korjainta monimutkaisempi mutta suorituskyky on lähellä MLSD:tä

Virheiden eteneminen

- Edellinen tarkastelu pätee tarkasti ottaen vain sillä oletuksella, että kaikki päätökset ovat oikeita ja takaisinkytkentäosa poistaa postcursor-ISIn ideaalisesti.
- Jos virheitä sattuu, virheet etenevät ja aiheuttavat uusia virheitä - loputtomiin?????
- Voidaan osoittaa (LM Appendix 10-A), että virheiden eteneminen loppuu aina kun tehdään N (rekursion asteluku) oikeaa päätöstä peräkkäin, ja että näin tapahtuu keskimäärin K symbolin kuluessa. K:n keskimääräiseksi arvoksi voidaan johtaa

$$K = 2(2^N - 1)$$

...Virheiden eteneminen

- Keskimääräiseksi virhetodennäköisyydeksi saadaan tällöin

$$P_e = 2^N P_{e,0}$$

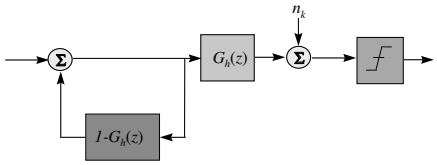
eli verrattuna ideaaliseen tilanteeseen (virheen etenemistä ei huomioida) virhetn on 2^N-kertainen. Pienillä N:n arvoilla tällä ei ole suurta merkitystä.

DFE-korjaimen käyttö

- DFE-korjain on käytössä monissa sovelluksissa, mm. modeemeissa, koska se parantaa selvästi lineaarisen korjaimen suorituskykyä minimaalisin lisäkustannuksin. Kun virheiden eteneminen voidaan pitää kurissa (riittävän lyhyt rekursiosuodatin ja pieni virhetn), sen käyttö on varteenotettava vaihtoehto.
- On kuitenkin syytä huomata, että DFE vaatii *välittömät* päätökset takaisinkytkentäsilmukassa. Tämä estää käytännöllisesti katsoen kokonaan virheenkorjaavan koodauksen käytön, sillä koodauksen purku vaatii yleensä usean symbolijakson viiveen. Kun DFE:tä käytetään, on siis pidettävä huoli siitä että aikaansaatu symbolivirhetn on riittävän pieni - koodauksella sitä ei enää voi parantaa.

Tomlinson-Harashima -esikoodaus

- Ilman virheiden etenemistä ja koodausongelmia DFE olisi ihanteellinen korjain. Miten nämä ongelmat voitaisiin poistaa?
- *Ratkaisu*: siirretään rekursiivinen osa *lähettimeen* jossa on virheetön tieto lähetettävistä symboleista (**LM Fig. 10-9a**):



TH -esikoodauksen edut

Esikoodauksen etuja:

- Kun oletetaan WMF-esiaste, vastaanottimen päätöksenteossa kohina on valkoista ja kohinavahvistus on poissa. Tämä johtuu siitä että tarvittava signaalin esikorostus tehdään jo lähettimessä *ennen* kuin kohina summautuu kanavaan
- Ei virheiden etenemistä => pienempi virhetn kuin DFE:llä

Uusia ongelmia:

- Esikorjaimen kertoimet (jotka riippuvat kanavasta) on estimoitava vastaanottimessa ja lähetettävä lähettimeen
- Esisuodatus yleensä kasvattaa signaalin amplitudia => vaadittava lähetysteho kasvaa!

TH -esikoodauksen toteutus

- TH-esikoodauksen lähetysteho-ongelma voidaan ratkaista *modulo-koodauksella* (tarkemmin kirjassa LM ss. 460-464)

TH-esikoodaus sopii käytettäväksi kun

- kanava muuttuu riittävän hitaasti (estimointi ja kertoimien lähetys mahdollista)
- halutaan parantaa DFE:n suorituskykyä virheenkorjaavalla koodauksella

Yksi esimerkki TH-esikoodauksen soveltamisesta ovat *V.34-tyyppiset puhelinverkon modeemit.* Niissä on esikoodauksen lisäksi käytössä *adaptiivinen lineaarinen korjain* vastaanottimen puolella, joka seuraa nopeita kanavan vaihteluita.