Helsinki University of Technology
Laboratory of Telecommunications Technology

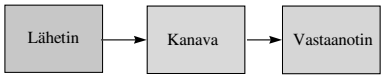
S-38.211 Signaalinkäsittely tietoliikenteessä I
Signal Processing in Communications (2 ov)

Syksy 1998

2. Luento: Pulssinmuokkaussuodatus

prof. Timo Laakso
Vastaanotto torstaisin klo 10-11
Huone G210, puh. 451 2473
Sähköposti: timo.laakso@hut.fi

Digitaalinen siirtojärjestelmä



- Tavoite: digitaalisen informaation siirto minimivirhein
- Lähetettävä signaali pitää valita kanavan ominaisuudet huomioiden
- Tärkeimmät kanavaparametrit:
  - kaistanleveys
  - signaalin vaimennus ja vääristymä (siirtofunktio)
  - kohina ja häiriöt

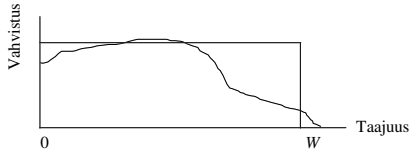
Käytännön siirtokanavia

- Kupariparikaapeli (puhelinjohdot)
- Koaksiaalikaapelit
- Optiset kuidut
- Maanpäälliset radioyhteydet
  - kiinteät
  - matkapuhelinjärjestelmät
- Satelliittiradioyhteydet
- Yhdistelmäkanavat (eri kanavien yhdistelmät esim. yhdellä puhelinyhteydellä)

Kanavan ominaisuuksia

KAISTARAJOITUS:

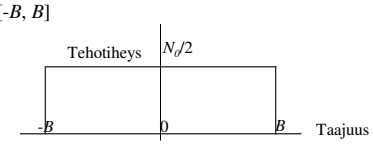
- käytännön kanavien vaimennus riippuu yleensä taajuudesta
- aiheuttaa aaltomuodon dispersiota (= suodatus)
- käytännön järjestelmissä käytetty kaista määritelty standardein



…Kanavan ominaisuuksia

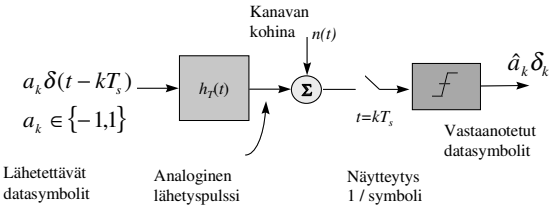
SUMMAUTUVA KOHINA:

- lämpökohina (elektroniikan vastuskomponentit)
- muiden käyttäjien ja järjestelmien häiriöt
- muut häiriöt (teholähteet, impulssihäiriöt releistä, salamat, radiokanavan häiriöt, moottorit jne.)
- malli: summautuva normaalijakautunut eli Gaussin kohina (additive white Gaussian noise, AWGN), kaistarajoitettu välille [-*B*, *B*]



Kaistarajoitettujen lähetyspulssien suunnittelu

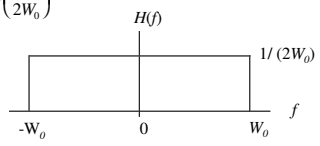
- Tarkastellaan seuraavaa yksinkertaista siirtojärjestelmää:



... Kaistarajoitettujen lähetyspulssien suunnittelu

- Jotta siirtokanavan kapasiteetti saadaan käytettyä tarkkaan hyväksi, lähetysteho kannattaa jakaa *tasaisesti* eri taajuuksille (tarkempi tarkastelu myöhemmin kurssissa!)
- Ideaalinen lähetyssignaalin tehospektri (kantataajuudella):

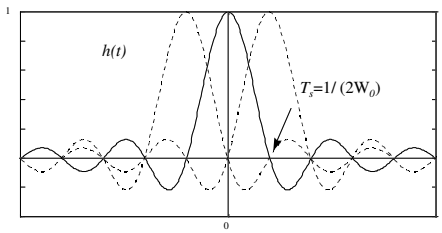
$$H(f) = \frac{1}{2W_0} rect\left(\frac{f}{2W_0}\right)$$



... Kaistarajoitettujen lähetyspulssien suunnittelu

- Ideaalinen aika-alueen pulssimuoto:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi ft} df = \frac{1}{2W_0} \int_{-W_0}^{W_0} e^{j2\pi ft} df = \mathrm{sinc}(2W_0 t)$$



... Kaistarajoitettujen lähetyspulssien suunnittelu

- Ideaalisella sinc-funktiolla sinc(x)=sin(πx)/(πx) on nollat kohdissa $t=kT_s$ paitsi kun k=0 (pulssin huippu)
- Siirtonopeudella $R_s=1/T_s=2W_0$ ei pulssien keskinäisvaikutusta *(intersymbol interference, ISI)* kun näytteet otetaan tarkasti nollakohdista!
- Ongelmia:
  - jyrkkä taajuusvaste hankala toteuttaa
  - hitaasti vaimeneva pulssimuoto
    => herkkyys ajastusvirheille
    => katkaisuvirheet käytännön toteutuksissa

... Kaistarajoitettujen lähetyspulssien suunnittelu

- Käytännöllisempi aaltomuoto: sallitaan *lisäkaistaa* (*excess bandwidth)* pulssispektrille jotta päästään vähemmän jyrkkään spektriin ja nopeammin vaimenevaan aaltomuotoon
- Ongelma: kuinka pulssispektri $H(f)$ on valittava jotta keskinäisvaikutus saadaan nollaksi?
- Ratkaisu: *Nyquistin kriteeri!*

Nyquistin kriteeri

- Tavoitteena nolla-ISI
- Vaatimus lähetettävälle pulssimuodolle:

$$h(kT_s)=\begin{cases}1, & k=0\\ 0, & k\neq 0\end{cases}$$

- Yhtäpitävä formulointi:

$$h(t)\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_s)=\delta(t)$$

...Nyquistin kriteeri

- Otetaan puolittain Fourier-muunnos aika-alueen kriteeristä:

$$h(t)\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_s)=\delta(t)$$

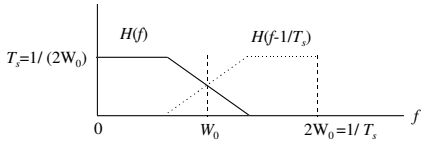
$$\Leftrightarrow\quad H(f)*\frac{1}{T_s}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(f-m/T_s)=1$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1}{T_s}\sum_{m=-\infty}^{\infty}H(f-m/T_s)=1$$

...Nyquistin kriteeri

- Kun spektri on kaistarajoitettu $W < 2W_0 = 1/T_s$, saadaan

$$H(f) + H(f - 1/T_s) = T_s$$



Nostettu kosinispektri

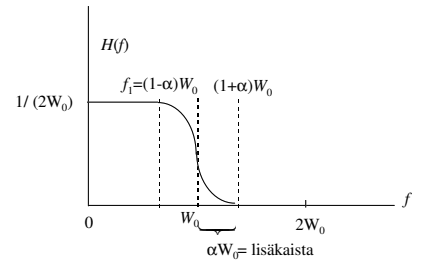
- Nyquistin kriteeri ei määrittele pulssimuotoa yksikäsitteisesti => toteutusnäkökohdat voidaan huomioida suunnittelussa
- Standardivalinta: *nostettu kosinispektri (raised-cosine spectrum):*

$$H(f) = \begin{cases} 1/(2W_0), & |f| < f_1 \\ \frac{1}{4W_0}\left\{1 + \cos\left[\frac{\pi(|f| - f_1)}{2W_0 - f_1}\right]\right\}, & f_1 < |f| < 2B_0 - f_1 \\ 0, & |f| > 2W_0 - f_1 \end{cases}$$

missä $f_1 = (1-\alpha)W_0$

... Nostettu kosinispektri

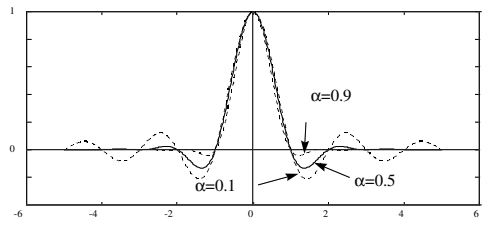
- α on lisäkaistakerroin (*rolloff factor*) joka määrittää lisäkaistan (*excess bandwidth*) suuruuden



Nostetun kosinispektrin aaltomuoto

- Kuten sinc-pulssille, aika-alueen aaltomuoto saadaan käänteisellä Fourier-muunnoksella (IFT):

$$h(t) = \text{sinc}(2W_0 t)\frac{\cos(2\pi\alpha W_0 t)}{1 - (4\alpha W_0 t)^2}$$

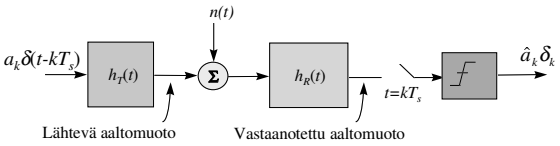


Havaintoja nost.kosinispektrin pulssimuodosta

- Pulssi vaimenee verrannollisena $1/t^3$ ja $1/\alpha^2$
- Lisäkaistakertoimen α suurentaminen
  - käyttää enemmän spektriä
  - nopeuttaa pulssin vaimenemista ($\alpha = 0$: sinc-pulssi)
- Tyypillisiä arvoja: $\alpha = 0.1 \ldots 0.5$
- Käytännön toteutus:
  - otetaan pulssista L näytettä symbolia kohden T_s (L>1, L kokonaisluku)
  - katkaistaan pulssisuodin 'keskeltä' sopivaan pituuteen ja kausaloidaan viiveellä
    (=> spektri muuttuu, nolla-ISI-ominaisuus pysyy)

Sovitettu suodatin

- Parannetaan siirtoyhteyden mallia:
  otetaan mukaan *vastaanottosuodatin* $h_R(t)$
- Mahdollistaa kohinan ym. häiriöiden suodattamisen vastaanottopäässä



... Sovitettu suodatin

- Vastaanottimen bittivirhesuhde (bit error rate, BER) riippuu suoraan signaali-kohinasuhteesta (signal-to-noise ratio, SNR) (olettaen WGN-kanava, ei ISIä): $P_e = Q(\sqrt{SNR})$
- BER voidaan minimoida *maksimoimalla SNR* näytehetkellä
- *Sovitettu suodin* (Matched filter, MF) *maksimoi SNR:n* annetulle lähetyspulssimuodolle näytehetkellä

... Sovitettu suodatin

- Suunnitellaan optimaalinen vastaanottosuodin $h_R(t)$ annetulle lähetyssuotimelle $h_T(t)$
- Vastaanotettu aaltomuoto (ilman kohinaa):

$$h(t) = h_T(t) * h_R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H_T(f) H_R(f) e^{j2\pi ft} df$$

- Symbolienergia näytehetkellä t=0:

$$|h(0)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} H_T(f) H_R(f) df \right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df$$

- käytetään *Schwarzin epäyhtälöä*!

... Sovitettu suodatin

- Keskimääräinen kohinateho vastaanottimen lähdössä:

$$E[n^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(f)\,df = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2\,df$$

- Signaali-kohinasuhde (SNR):

$$SNR = \frac{|h(0)|^2}{E[n^2(t)]} \le \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2\,df \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2\,df}{\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2\,df}$$

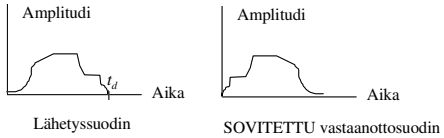
$$= \frac{2}{N_0}\int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2\,df = SNR_{MAX}$$

... Sovitettu suodatin

- Maksimi-SNR saavutetaan kun

$$H_R(f) = H_T^*(f) \quad \Leftrightarrow \quad h_R(t) = h_T(-t)$$

- Kausaalinen toteutus: $h_R(t) = h_T(t_d - t)$



Lähetyssuodin SOVITETTU vastaanottosuodin

Miksi sovitettu suodatin?

Oletetaan *AWGN-kanava*

1) Lähetetään yksi pulssi jonka energia E_s, ei vastaanottosuodatusta:

$$SNR = \frac{E_s}{N_0}$$

2) Lähetetään pulssi jonka energia on E_s ja käytetään sovitettua suodatinta vastaanotossa:

$$SNR = \frac{2}{N_0}\int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2\,df = \frac{2E_s}{N_0}$$

- Sovitettu suodatin *kaksinkertaistaa* SNR:n!

Lähetys- ja vastaanottopulssien valinta

- Vastaanotettu kokonaispulssi:

$$h(t) = h_T(t) * h_R(t) = h_T(t) * h_T(-t)$$

$$H(f) = H_T(f)H_T^*(f) = |H_T(f)|^2$$

- Suotimen jako lähettimen ja vastaanottimen kesken:
  1) Valitaan positiivinen ja symmetrinen $H(f)$
  2) Määritetään $H_T(f) = H_R(f) = \sqrt{H(f)}$
  3) Lasketaan $h_T(t) = h_R(t)$ IFT:n avulla
  4) Näytteytetään, katkaistaan ja kausaloidaan (digitaalinen toteutus!)

Juuri-Nyquist-suodin

- Juuri-Nyquist (tai Puoli-Nyquist; Root-Nyquist/Half-Nyquist) suodin yhdistää
  - Nyquist-aaltomuodon (nolla-ISI)
  - sovitetun suotimen (makimi-SNR)
- Ositus samanlaisiin suotimiin lähetys- ja vastaanottopäähän
- Esimerkki: juurikosinisuodin (Root-Raised-Cosine, RRC)

Juurikosinisuodin

- Juurikosinisuotimen spektri: otetaan neliöjuuri nostetusta kosinispektristä:

$$H_T(f) = \begin{cases} 1/\sqrt{2W_0}, & |f| < f_1 \\ \frac{1}{\sqrt{4W_0}} \sqrt{1+\cos\left[\frac{\pi(|f|-f_1)}{2W_0-f_1}\right]}, & f_1 < |f| < 2B_0 - f_1 \\ 0, & |f| > 2W_0 - f_1 \end{cases}$$

missä $f_1 = (1-\alpha)W_0$

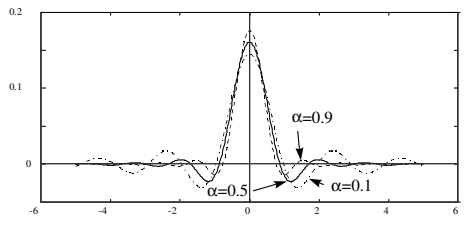
...Juurikosinisuodin

Juurikosinisuotimen aaltomuoto saadaan jälleen IFT:n avulla (työläs laskettava!):

$$r(t) = \frac{\sqrt{T_s}}{\pi t}\sin\left(2\pi(1-\alpha)W_0 t\right) + \frac{\sqrt{T_s}}{(2\pi t)^2 - \left(\frac{\pi}{4\alpha W_0}\right)^2}\left[(4\pi t)\sin\left(2\pi(\alpha-1)W_0 t\right) - \left(\frac{\pi}{2\alpha W_0}\right)\cos\left(2\pi(\alpha+1)W_0 t\right)\right]$$

...Juurikosinisuodin

- Juurikosinisuotimen aaltomuotoja eri α:n arvoilla:



...Juurikosinisuodin

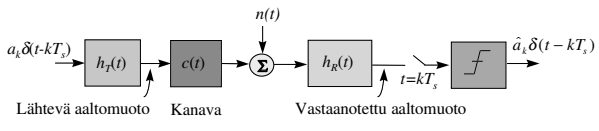
- HUOMAA:
  Juurikosinisuotimella *ei* yleisesti ole nollakohtia symbolivälein $t=kT_s$!
- Käytännön toteutus: näytteytä, katkaise, kausaloi
- Ropleemi: katkaisuvirheet aiheuttavat ISIä (konvoluutio!)
  => Suotimen pituus valittava riittävän suureksi

Sovitettu suodatin lineaarisessa kanavassa

- MF-suodin maksimoi signaali-kohinasuhteen annetulle lähetyspulssille AWGN-kanavassa
- Käytännön kanava kuitenkin sisältää yleensä *lineaarista* vääristymää!
- AWGN-kanavassa johdettu sovitettu suodatin voidaan yleistää *lineaariseen kanavaan* (jossa myös summautuvaa valkoista Gaussin kohinaa)

...Sovitettu suodatin lineaarisessa kanavassa

- Täydennetty siirtojärjestelmän malli
- Sisältää lineaarisen aikainvariantin kanavan jonka impulssivaste on $c(t)$ ja taajuusvaste $C(f)$



... Sovitettu suodatin lineaarisessa kanavassa

- Vastaanotettu aaltomuoto:

$$h(t) = h_T(t) * c(t) * h_R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H_T(f)C(f)H_R(f)e^{j2\pi ft}df$$

- Symbolienergia näytehetkellä $t=0$:

$$|h(0)|^2 = \left|\int_{-\infty}^{\infty} H_T(f)C(f)H_R(f)df\right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty}|H_T(f)C(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty}|H_R(f)|^2 df$$

- Kanava voidaan ajatella yhdistetyksi lähetyssuotimeen:

$$H_T'(f) = H_T(f)C(f) \quad \text{eli} \quad h_T'(t) = h_T(t) * c(t)$$

... Sovitettu suodatin lineaarisessa kanavassa

- Vastaavaan tapaan kuin AWGN-kanavassa saadaan SNR:n maksimoiva ratkaisu

$$H_R(f) = H_T^*(f)C^*(f)$$

$$\Leftrightarrow \quad h_R(t) = h_T(-t) * c(-t)$$

- Kausaalinen toteutus:

$$h_{R,caus}(t) = h_R(t - t_d)$$

... Sovitettu suodatin lineaarisessa kanavassa

Ongelmia:

- Yleensä lineaarinen *kanava ei ole tunnettu* vastaanottimessa
  => suodinta vaikea suunnitella etukäteen
- Sovitettu suodin *maksimoi yhden pulssin SNR:n* mutta ei huomioi lineaarisen kanavan aiheuttamaa pulssien *keskinäisvaikutusta (ISIä)*
  => ei johda hyvään (saati sitten optimaaliseen!) BERriin jatkuvassa siirtoyhteydessä!

Lineaarisen kanavan vastaanottosuodatus

Tulevissa luennoissa perehdytään tarkemmin optimaalisiin vastaanottimiin lineaarisessa kanavassa, mm.:

- Optimaalinen *lineaarinen* vastaanotin: minimoidaan ISIn ja kohinan tehollisarvo (MMSE-korjaimet ja niiden adaptiiviset toteutukset)
- Optimaalinen vastaanotin lin. kanavassa (min BER) on *epälineaarinen* ja voidaan toteuttaa *Viterbi-algoritmilla*
- Viterbi-algoritmi vaatii valkoisen kohinan prosessin
  => määritellään *valkaistu sovitettu suodatin*
  (whitened matched filter, WMF)