JONOVERKOT

Useasta jonosta muodostuva verkko

- Queueing network
- Network of queues

Esimerkiksi

- Asiakkaita siirtyy postin, pankin, kaupan jonoista toiseen
- Datapaketteja kulkee reititinverkon reitittimeltä toiselle

Historiaa

- Burken teoreema, Burke (1957), Reich (1957)
- Jackson (1957, 1963): avoimet jonoverkot, tulomuotoinen ratkaisu
- Gordon ja Newell (1967): suljetut jonoverkot
- Baskett, Chandy, Muntz, Palacios (1975): jonotyypin yleistykset
- Reiser ja Lavenberg (1980, 1982): keskiarvoanalyysi, MVA

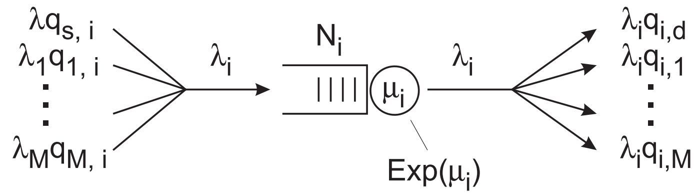
Jacksonin jonoverkko (avoin jonoverkko)

Jacksonin avoin jonoverkko muodostuu M solmusta (jonosta) seuraavin oletuksin:

- Solmu i on FIFO-jono
  - rajaton määrä odotuspaikkoja
- Palveluaika jonossa noudattaa jakaumaa Exp(μ_i)
  - kussakin jonossa asiakkaan palveluaika saa arvon riippumatta ajasta muissa jonoissa
  - huom. pakettiverkossa paketin lähetysaika todellisuudessa on sama kaikissa jonoissa (tai poikkeaa vain vakiotekijällä, linjanopeuden käänteisarvolla)
  - tämä riippuvuus ei käytännössä kuitenkaan vaikuta merkittävästi järjestelmän käyttäytymiseen (ns. Kleinrockin riippumattomuusoletus)
- Poistuttuaan jonosta i asiakas valitsee seuraavan jonon j satunnaisesti todennäköisyydellä $q_{i,j}$ tai poistuu systeemistä todennäköisyydellä $q_{i,d}$
  - mallia voidaan laajentaa siten, että sidotut reitit ovat mahdollisia
- Verkko on avoin ulkopuolisille saapumisille
  - lähteestä s saapuu asiakkaita Poisson-virtana intensiteetillä λ
  - niistä osa $q_{s,i}$ saapuu jonoon i (intensiteetti $\lambda q_{s,i}$)

Jacksonin verkon solmu i

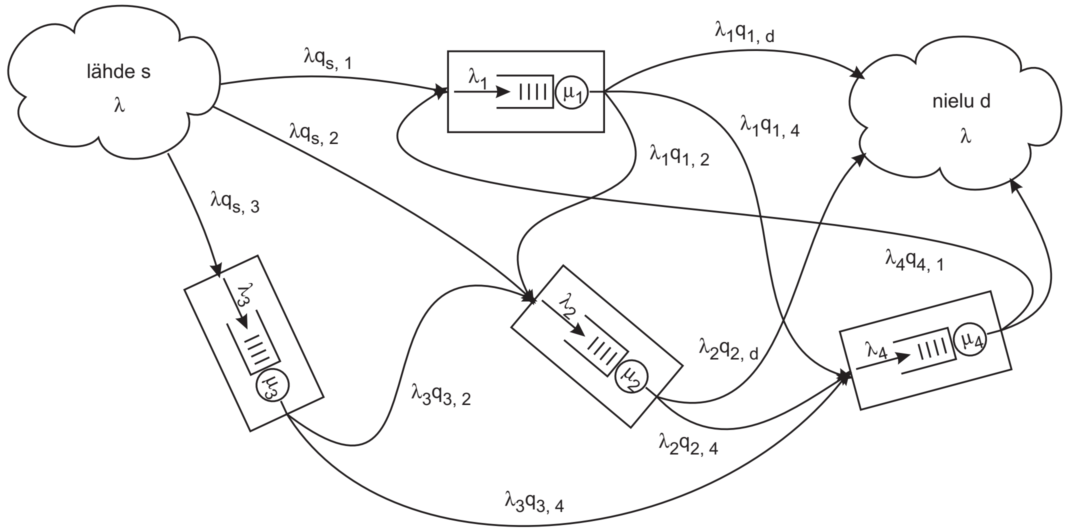
$$\begin{cases} s & = \text{source, ulkoinen lähde} \\ d & = \text{destination, nielu} \\ N_i & = \text{asiakkaiden lukumäärä jonossa } i \end{cases}$$



Ilman komplikaatioita voitaisiin olettaa tilariippuva palvelunopeus $\mu_i = \mu_i(N_i)$. Tämän avulla voitaisiin kuvata mm. usean palvelimen solmuja. Merkintöjen keventämiseksi seuraavassa oletetaan vakio μ_i.

Jacksonin verkko

Verkon avoimuus edellyttää, että jokaisesta jonosta on ainakin yksi polku ($\neq 0$) nieluun d eli että jokainen verkkoon saapunut asiakas lopulta poistuu siitä todennäköisyydellä 1.



Virtojen säilymisyhtälö

Merkitään λ_i = keskimääräinen asiakasvirta solmun i läpi.

- Vaikka ulkoiset saapumisvirrat eri solmuihin ovat poissonisia, mikään ei takaa, että virrat verkon sisällä solmujen välillä olisivat myös poissonisia. Yleensä ne eivät olekaan.
  - poikkeuksena tapaukset, joissa verkossa ei ole silmukoita eli asiakas ei koskaan palaa solmuun, jossa on jo vieraillut; tällöin poissonisuus seuraa Burken teoreemasta.

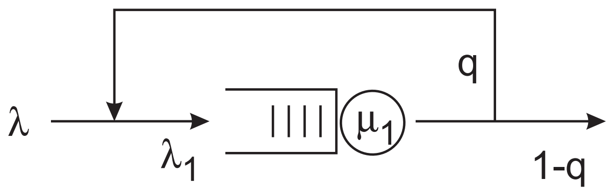
Virta λ_i on peräisin suoraan lähteestä tulevasta virrasta ja muista solmuista haarautuvista virroista. Säilymisehdot muodostavat lineaarisen yhtälöryhmän, josta λ_i:t voidaan ratkaista.

$$\boxed{\lambda_i = \lambda q_{s,i} + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j q_{j,i}} \qquad i = 1, \ldots, M$$

Vastaava yhtälö pätee nielulle d. Koska koko verkosta poistuvan virran täytyy olla yhtäsuuri kuin saapuva virta, pätee ($q_{s,d} = 0$):

$$\boxed{\lambda = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j q_{j,d}}$$

Esimerkki



$$\lambda_1 = \lambda + q\lambda_1$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{\lambda}{1-q}$$

Huom. λ_1 ei ole poissoninen vaikka λ onkin.

Jacksonin teoreema

- Asiakkaiden lukumäärät N_i verkon eri solmuissa, $i = 1, \ldots, M$, ovat toisistaan riippumattomia.
- Jono i käyttäytyy ikään kuin saapumisvirta λ_i olisi poissoninen.

Tilavektori

Verkon tilan määrää vektori $\mathbf{N} = (N_1, \ldots, N_M)$.
Sen mahdollisia arvoja merkitään $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_M)$.
Verkko on tilassa $\mathbf{n}$, kun $\mathbf{N} = \mathbf{n}$ eli $N_1 = n_1, \ldots, N_M = n_M$.

Tilatodennäköisyys

$p(\mathbf{n}) = \mathrm{P}\{\mathbf{N} = \mathbf{n}\}$
Määritellään $p(\mathbf{n}) = 0$,
jos jokin $n_i < 0$

Jacksonin teoreema

$$\boxed{p(\mathbf{n}) = p_1(n_1) \cdots p_M(n_M) = \prod_{i=1}^{M} p_i(n_i)} \qquad \text{missä} \qquad \boxed{p_i(n_i) = (1-\rho_i)\rho_i^{n_i}} \qquad \rho_i = \lambda_i/\mu_i$$

- Verkko käyttäytyy ikään kuin se muodostuisi joukosta riippumattomia $M/M/1$-jonoja.
- Tilatodennäköisyys on tulomuotoinen $\Leftrightarrow$ riippumattomuus.
- Jos jossain solmussa on paljon asiakkaita, siitä ei seuraa mitään sen suhteen paljonko esim. naapurisolmuissa on asiakkaita.

Jos palvelunopeus on tilariippuva $\mu_i(n_i)$, niin

$$p_i(n_i) = p_i(0) \frac{\lambda_i^{n_i}}{\prod_{j=1}^{n_i} \mu_i(j)}$$

missä $p_i(0)$ määräytyy normiehdosta

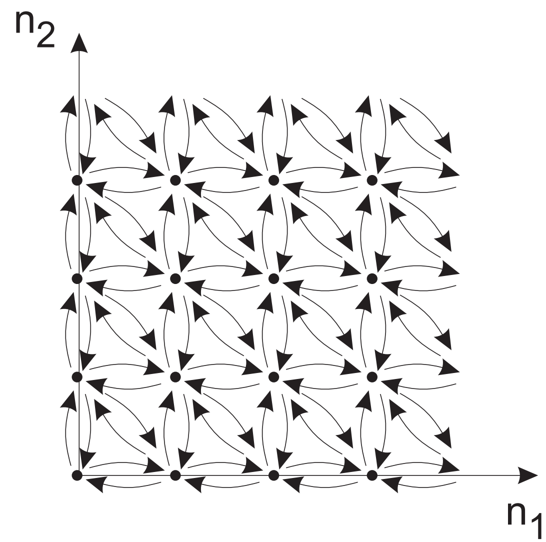
Jacksonin teoreeman todistus

Merkitään $\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i\text{:s alkio}}, 0, \ldots, 0)$.

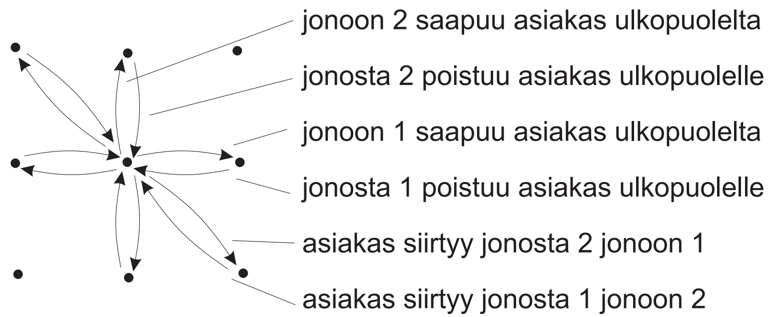
Tällöin on esimerkiksi

$$p(\mathbf{n} - \mathbf{e}_i) = p(n_1, \ldots, n_{i-1}, n_i - 1, n_{i+1}, \ldots, n_M)$$

Nyt voidaan kirjoittaa globaali tasapainoehto verkon tilalle $\mathbf{n}$ (yksi yhtälö jokaista mahdollista tilaa $\mathbf{n}$, $n_i \geq 0\ \forall i$, kohti):



$$\begin{aligned}\lambda\, p(\mathbf{n}) + \sum_{i=1}^{M} \mu_i 1_{n_i>0}\, p(\mathbf{n}) \;=\; & \lambda \sum_{i=1}^{M} q_{s,i}\, p(\mathbf{n} - \mathbf{e}_i) \\ & + \sum_{i=1}^{M} q_{i,d}\, \mu_i\, p(\mathbf{n} + \mathbf{e}_i) \\ & + \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} q_{j,i}\, \mu_j\, p(\mathbf{n} + \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i)\end{aligned}$$



missä vasen puoli edustaa todennäköisyysvirtaa pois tilasta $\mathbf{n}$ (kun ollaan tilassa $\mathbf{n}$ ja verkkoon tulee mikä tahansa saapuminen tai mistä tahansa verkon jonosta tapahtuu poistuminen, siirrytään uuteen tilaan) ja oikea puoli virtaa tilaan $\mathbf{n}$ (vrt. kuvan siirtymäkaavio).

Huom. Jälleen voitaisiin sallia tilariippuvuus $\mu_i = \mu_i(n_i)$.

Jacksonin teoreeman todistus (jatkoa)

Kirjoitetaan oikean puolen ensimmäisessä termissä oleva tekijä $\lambda q_{s,i}$ toiseen muotoon virtojen säilymisehdon avulla: $\lambda q_{s,i} = \lambda_i - \sum_{i=1}^{M} \lambda_j q_{j,i}$. Yhtälö saa muodon

$$\begin{aligned}
\lambda\, p(\mathbf{n}) + \sum_{i=1}^{M} \mu_i 1_{n_i>0}\, p(\mathbf{n}) \;=\; & \sum_{i=1}^{M} \lambda_i\, p(\mathbf{n}-\mathbf{e}_i) - \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} \lambda_j\, q_{j,i}\, p(\mathbf{n}-\mathbf{e}_i) \\
& + \sum_{i=1}^{M} q_{i,d}\, \mu_i\, p(\mathbf{n}+\mathbf{e}_i) \\
& + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} q_{j,i}\, \mu_j\, p(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_i)
\end{aligned}$$

Sijoitetaan tähän Jacksonin teoreeman (väite) mukainen tulomuotoinen ratkaisu yritteenä ja osoitetaan, että yhtälö toteutuu.

Kyseiselle tulomuotoiselle yritteelle pätee

$$\begin{cases}
\lambda_i\, p(\mathbf{n}-\mathbf{e}_i) = \mu_i\, 1_{n_i>0}\, p(\mathbf{n}) \\
\lambda_j\, p(\mathbf{n}-\mathbf{e}_i) = \mu_j\, p(\mathbf{n}-\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j) \\
\lambda_i\, p(\mathbf{n}) = \mu_i\, p(\mathbf{n}+\mathbf{e}_i)
\end{cases}$$

Sijoitetaan nämä relaatiot tässä järjestyksessä oikean puolen kolmeen ensimmäiseen termiin.

Jacksonin teoreeman todistus (jatkoa)

Yhtälö on nyt saatu muotoon

$$\begin{aligned}\lambda\, p(\mathbf{n}) + \sum_{i=1}^{M} \mu_i 1_{n_i>0}\, p(\mathbf{n}) \;=\;& \sum_{i=1}^{M} \mu_i\, 1_{n_i>0}\, p(\mathbf{n}) - \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} q_{j,i}\, \mu_j\, p(\mathbf{n}-\mathbf{e}_i) \\ &+ \sum_{i=1}^{M} q_{i,d}\, \lambda_i\, p(\mathbf{n}) \\ &+ \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} q_{j,i}\, \mu_j\, p(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_i)\end{aligned}$$

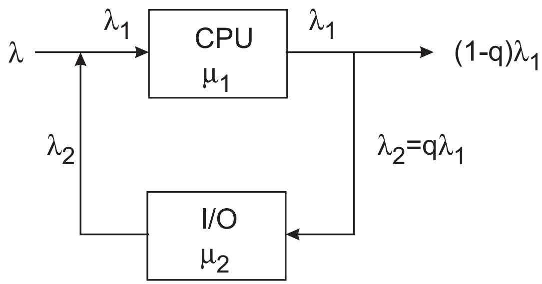
Yhtälössä menevät vastakkain vasemman puolen toinen ja oikean puolen ensimmäinen termi, samoin oikean puolen toinen ja neljäs termi. Jäljelle jää

$$\lambda\, p(\mathbf{n}) \;=\; \sum_{i=1}^{M} q_{i,d}\, \lambda_i\, p(\mathbf{n}) = \; p(\mathbf{n}) \sum_{i=1}^{M} q_{i,d}\, \lambda_i$$

mikä toteutuu, koska verkkoon tuleva ja siitä lähtevä virta ovat yhtäsuuret, $\lambda = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i q_{i,d}$. Siten on osoitettu, että Jacksonin teoreeman mukaiset tulomuotoiset tilatodennäköisyydet todellakin toteuttavat verkkoa kuvaavan Markovin prosessin globaalit tasapainoyhtälöt.

<u>*Esimerkki*</u>

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda + \lambda_2 \\ \lambda_2 = q \cdot \lambda_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{\lambda}{1-q} \\ \lambda_2 = \dfrac{\lambda \cdot q}{1-q} \end{cases}$$



$$\rho_1 = \lambda_1/\mu_1, \qquad \rho_2 = \lambda_2/\mu_2$$

$$p(n_1, n_2) = (1-\rho_1)\rho_1^{n_1}(1-\rho_2)\rho_2^{n_2}$$

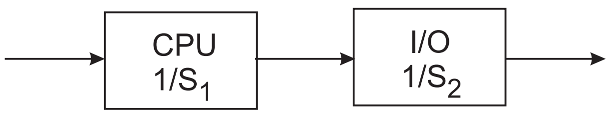
<u>*Keskimääräiset jononpituudet*</u>

$$\bar{N}_1 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1}, \qquad \bar{N}_2 = \frac{\rho_2}{1-\rho_2}, \qquad \bar{N} = \bar{N}_1 + \bar{N}_1 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} + \frac{\rho_2}{1-\rho_2}$$

<u>*Keskimääräinen aika systeemissä*</u>

$$\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{\rho_1}{\lambda(1-\rho_1)} + \frac{\rho_2}{\lambda(1-\rho_2)} = \frac{\lambda_1/\mu_1}{\lambda(1-\lambda_1/\mu_1)} + \frac{\lambda_2/\mu_2}{\lambda(1-\lambda_2/\mu_2)} = \frac{S_1}{1-\lambda S_1} + \frac{S_2}{1-\lambda S_2}$$

<u>Ekvivalentti systeemi</u>



missä

$$\begin{cases} S_1 = \dfrac{\lambda_1}{\mu_1 \lambda} = \dfrac{1}{1-q} \cdot \dfrac{1}{\mu_1} & \text{keskimääräinen CPU-aika} \\ S_2 = \dfrac{\lambda_2}{\mu_2 \lambda} = \dfrac{q}{1-q} \cdot \dfrac{1}{\mu_2} & \text{keskimääräinen I/O-aika} \end{cases}$$

Jacksonin verkon keskiarvotuloksia

Oletetaan tilasta riippumattomat palvelunopeudet μ_i.

Keskimääräinen asiakkaiden lukumäärä solmussa i

$$\bar{N}_i = \frac{\rho_i}{1-\rho_i}$$

Keskimääräinen viipymisaika solmussa i

$$\bar{T}_i = \frac{\bar{N}_i}{\lambda_i} = \frac{1}{1-\rho_i}\frac{1}{\mu_i} = \frac{1}{\mu_i - \lambda_i}$$

Keskimääräinen odostusaika solmussa i

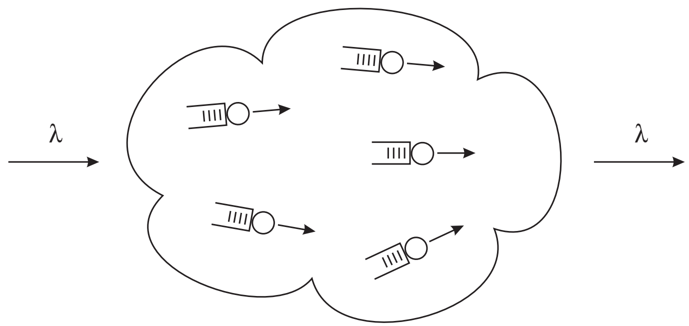
$$\bar{W}_i = \bar{T}_i - \frac{1}{\mu_i} = \frac{\rho_i}{1-\rho_i}\frac{1}{\mu_i}$$

Solmuun i saapuneen asiakkaan keskimääräinen viipymisaika verkossa

$$\boxed{\bar{T}_{i,d} = \bar{T}_i + \sum_{j=1}^{M} q_{i,j}\bar{T}_{j,d}}$$

vrt. virtojen säilymisyhtälö
Tästä yhtälöryhmästä $(i = 1, \ldots, M)$ voidaan $\bar{T}_{i,d}$:t ratkaista.

Asiakkaan keskimääräinen viipymisaika verkossa (keskiarvo koko asiakaspopulaation yli)



Littlen tuloksen perusteella

$$\boxed{\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{M}\frac{\lambda_i}{\mu_i - \lambda_i}}$$

Optimaalinen kapasiteetin jako

Halutaan minimoida keskimääräinen viipymisaika $\bar{T}$ verkossa tai, mikä on sama asia, keskimääräinen asiakkaiden lukumäärä $\bar{N}$ verkossa.

Oletetaan, että kapasiteetit μ_i ovat muuten vapaasti valittavissa, mutta niitä rajoittaa ehto (kustannusehto) $\sum_{i=1}^{M} \mu_i = C$.

$$\bar{N} = \sum_{i=1}^{M} \frac{\lambda_i}{\mu_i - \lambda_i} = \min!, \qquad \sum_{i=1}^{M} \mu_i = C$$

Käytetään Lagrangen kerroinmenetelmää ja minimoidaan

$$H = \sum_{i=1}^{M} \frac{\lambda_i}{\mu_i - \lambda_i} + x(\sum_{i=1}^{M} \mu_i - C)$$

parametrien μ_i suhteen ja määrätään x siten, että minimipiste toteuttaa rajoitusehdon

$$\frac{\partial H}{\partial \mu_i} = -\frac{\lambda_i}{(\mu_i - \lambda_i)^2} + x = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_i = \lambda_i + (\lambda_i / x)^{1/2}$$

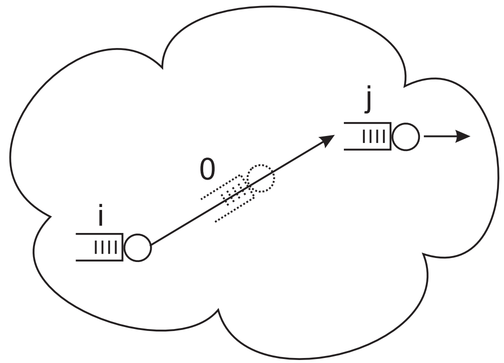
Sijoittamalla tämä ehtoyhtälöön, saadaan

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{C - \sum_j \lambda_j}{\sum_j \sqrt{\lambda_j}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu_i = \lambda_i + \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sum_j \sqrt{\lambda_j}}(C - \sum_j \lambda_j)}$$

Ensin allokoidaan pakollinen kapasiteetti λ_i; ylijäämäraha jaetaan $\sqrt{\lambda_i}$:den suhteessa.

Avoimen verkon saapumislause (Random Observer Property, vrt. PASTA)

Avoimessa jonoverkossa mihin tahansa solmuun saapuvan asiakkaan näkemät tilatodennäköisyydet (todennäköisyys, että systeemi on tilassa $\mathbf{n}$ juuri ennen saapumista) ovat samat kuin tasapainotodennäköisyydet $p(\mathbf{n})$.



Todistus. Tarkastellaan jonosta i jonoon j siirtyvää asiakasta. Sijoitetaan näiden jonojen väliin kuvitteellinen jono 0, jossa palvelunopeus μ_0 on hyvin suuri.

Rajalla $\mu_0 \to \infty$ lisätty jono ei mitenkään vaikuta systeemin käyttäytymiseen: jonosta i jonoon j siirtyvät asiakkat viipyvät vain häviävän pienen hetken lisätyssä välijonossa.

Lisätty jono kuitenkin mahdollistaa siirtyvän asiakkaan "vangitsemisen". Siirtyminen tapahtuu juuri sinä lyhyenä hetkenä, jolloin jonossa 0 on asiakas eli kun $N_0(t) = 1$. Siirtyvän asiakkaan näkemä verkon tilajakauma on muiden jonojen (muiden kuin jono 0) yhteisjakauma ehdolla $N_0 = 1$.

Nyt käytetään hyväksi sitä, että myös laajennettu systeemi muodostaa Jacksonin jonoverkon ja sen tilajakauma on tulomuotoinen. Merkitään laajennetun systeemin tilavektoria $\mathbf{n}'$:lla eli $\mathbf{n}' = (n_0, n_1, \ldots, n_M)$. Pätee $p'(\mathbf{n}') = \mathrm{P}\{\mathbf{N}' = \mathbf{n}'\} = p_0(n_0)p_1(n_1)\cdots p_M(n_M) = p_0(n_0)p(\mathbf{n})$.

$$\mathrm{P}\{N_1 = n_1, \ldots, N_M = n_M \,|\, N_0 = 1\} = \frac{\mathrm{P}\{N_0 = 1, N_1 = n_1, \ldots, N_M = n_M\}}{\mathrm{P}\{N_0 = 1\}} = p(\mathbf{n})$$

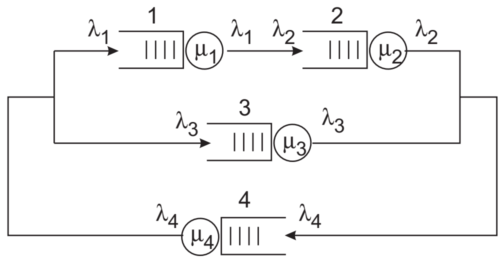
Suljettu jonoverkko (Gordonin ja Newellin verkko)

Suljettu jonoverkko muodostuu M solmusta. Se eroaa avoimesta jonoverkosta siinä, että ulkoista lähdettä ja nielua ei ole. Verkon sisällä kiertää K:n asiakkaan vakiopopulaatio.

- Kukin solmu i muodostaa FIFO-jonon, jossa palveluaika arvotaan muista riippumatta jakaumasta $\mathrm{Exp}(\mu_i)$. Jälleen voitaisiin sallia tilariippuvat palvelunopeudet $\mu_i(n_i)$.
- Jonosta i poistuva asiakas valitsee solmun j seuraavaksi kohteeksi todennäköisyydellä $q_{i,j}$.

Eri solmujen läpi kulkevat asiakasvirrat λ_i toteuttavat virtojen säilymisehdon

$$\boxed{\lambda_i = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j q_{j,i}} \qquad i = 1, \ldots, M$$



Nämä muodostavat homogeenisen lineaarisen yhtälöryhmän. Yksi yhtälö on muista lineaarisesti riippuva, ja ratkaisu on vakiotekijää vaille yksikäsitteisesti määrätty.

Olkoon $(\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_M)$ yhtälöryhmän jokin ratkaisu. Yleinen ratkaisu on muotoa $\alpha \cdot (\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_M)$, missä α on vakio. Se mitä α:n arvoa todelliset virrat vastaavat, jää toistaiseksi määräämättä. Asia selviää ns. keskiarvoanalyysin yhteydessä. Merkitään kyseistä arvoa $\hat{\alpha}$:lla, ts. $\lambda_i = \hat{\alpha}\hat{\lambda}_i$.

Merkitään $\hat{\rho}_i = \hat{\lambda}_i/\mu_i$. Nämä suureet ovat vastaavasti verrannollisia jonojen todellisiin kuormiin $\rho_i = \lambda_i/\mu_i$, nimittäin $\rho_i = \hat{\alpha}\hat{\rho}_i$.

Gordonin ja Newellin lause

Suljetun jonoverkon tasapainotodennäköisyydet ovat

$$\boxed{p(\mathbf{n}) = \begin{cases} \dfrac{1}{G(K,M)} \prod_{i=1}^{M} \hat{\rho}_i^{n_1}, & \text{kun } \sum_i n_i = K \\ 0, & \text{kun } \sum_i n_i \neq K \end{cases}} \quad \text{missä} \quad \boxed{G(K,M) = \sum_{\mathbf{n}:\, \sum_i n_i = K} \prod_{i=1}^{M} \hat{\rho}_i^{n_1}}$$

Todistus on samantapainen kuin avoimessa jonoverkossa. Yksityiskohdat sivuutetaan.

Todennäköisyysjakauma on siis tässäkin tapauksessa tulomuotoinen alueessa $\sum_i n_i = K$ (mutta ei kaikkialla!).

Huom. Vaikka tekijöissä $\hat{\rho}_i$ on määräämätön kerroin, itse ratkaisu on täysin määrätty, koska sama tekijä korotettuna potenssiin K esiintyy sekä tulossa että nimittäjän normitekijässä.

Suljetun jonoverkon saapumislause (Lavenberg)

Suljetussa jonoverkossa, jossa on K asiakasta, mihin tahansa solmuun saapuvan asiakkaan näkemät tilatodennäköisyydet ovat samat kuin tasapainotodennäköisyydet $p[K-1](\mathbf{n})$ verkossa, jossa on $K-1$ asiakasta (Vrt. asiakkaan näkemä jakauma Engsetin järjestelmässä; mielivaltainen asiakas on ikään kuin “ulkopuolisen tarkkailijan” roolissa).

Lause voidaan todistaa samalla tavalla apujonon avulla kuin avoimen jonoverkon tapauksessa. Yksityiskohdat sivuutetaan.

Keskiarvoanalyysi – MVA, Mean Value Analysis (Reiser ja Lavenberg)

Halutaan selvittää asiakkaiden keskimääräiset lukumäärät $\bar{N}_i[K]$ sekä viipymisajat $\bar{T}_i[K]$ samoin kuin asiakasvirtojen λ_i absoluuttiset tasot eri jonoissa.

Analyysi perustuu keskeisesti edellä esitettyyn saapumislauseeseen. Laskenta tapahtuu rekursiivisesti lisäten askelittain asiakkaiden lukumäärää verkossa. Tämän vuoksi asiakkaiden kokonaismäärä merkitään eksplisiittisesti näkyviin hakasuluissa.

Keskimääräiselle viipymisajalle jonossa i pätee

$$\bar{T}_i[K] = \underbrace{\frac{1}{\mu_i}}_{\text{oma palveluaika}} + \underbrace{\bar{N}_i^*[K] \cdot \frac{1}{\mu_i}}_{\text{edessä olevien asiakkaiden palveluun kuluva aika}}$$

missä $\bar{N}_i^*[K]$ on jonoon i saapuvan asiakkaan keskimäärin näkemä miehitys jonossa. Saapumislauseen perusteella pätee

$$\bar{N}_i^*[K] = \bar{N}_i[K-1]$$

missä $\bar{N}_i[K-1]$ on tavallinen tasapainojakaumasta laskettu miehitys. Siten on

$$\boxed{\bar{T}_i[K] = (1 + \bar{N}_i[K-1]) \cdot \frac{1}{\mu_i}}$$

Keskiarvoanalyysi (jatkoa)

Keskimääräinen miehitys jonossa i on

$$\boxed{\bar{N}_i[K] = K \cdot \frac{\hat{\lambda}_i \cdot \bar{T}_i[K]}{\sum_{j=1}^{M} \hat{\lambda}_j \cdot \bar{T}_j[K]}}$$

Todistus. Todelliset asiakasvirrat ovat $\lambda_i = \hat{\alpha}\hat{\lambda}_i$. Laventamalla lauseke $\hat{\alpha}$:lla ja soveltamalla Littlen lausetta nähdään

$$K \cdot \frac{\hat{\lambda}_i \cdot \bar{T}_i[K]}{\sum_{j=1}^{M} \hat{\lambda}_j \cdot \bar{T}_j[K]} = K \cdot \frac{\lambda_i \cdot \bar{T}_i[K]}{\sum_{j=1}^{M} \lambda_j \cdot \bar{T}_j[K]} = K \cdot \frac{\bar{N}_i[K]}{\sum_{j=1}^{M} \bar{N}_j[K]} = K \cdot \frac{\bar{N}_i[K]}{K} = \bar{N}_i[K]$$

Soveltamalla Littlen lausetta toiseen suuntaan saadaan todellinen asiakasvirta jonon i läpi:

$$\boxed{\lambda_i[K] = \frac{\bar{N}_i[K]}{\bar{T}_i[K]} = K \cdot \frac{\hat{\lambda}_i}{\sum_{j=1}^{M} \hat{\lambda}_j \cdot \bar{T}_j[K]}}$$

MVA-algoritmi

Tulokset voidaan koota seuraavaksi rekursiiviseksi laskentamenetelmäksi.

Rekursion alku:

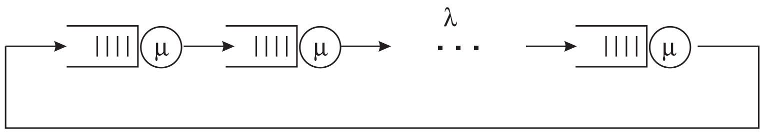
$\boxed{\bar{N}_i[0] = 0}$ Kun verkko on tyhjä, kaikki keskiarvot ovat nollia.

Rekursioaskel:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{T}_i[K] &= (1 + \bar{N}_i[K-1]) \cdot \frac{1}{\mu_i} \\ \bar{N}_i[K] &= K \cdot \frac{\hat{\lambda}_i \cdot \bar{T}_i[K]}{\sum\limits_{j=1}^{M} \hat{\lambda}_j \cdot \bar{T}_j[K]} \\ \lambda_i[K] &= \frac{\bar{N}_i[K]}{\bar{T}_i[K]} \end{aligned}}$$

Keskimmäisessä kaavassa $\hat{\lambda}_i$:t ovat mikä tahansa virtausyhtälöiden $\lambda_i = \sum_j \lambda_j q_{j,i}$ ratkaisu.

Esimerkki 1. Syklinen verkko



$$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_M = \mu$$

Virtausyhtälöiden eräs ratkaisu on:
$\hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_2 = \cdots = \hat{\lambda}_M = 1$

Koska kaikki jonot ovat samanlaisia, voidaan indeksit jättää pois. Rekursioyhtälöt ovat nyt

$$\begin{cases} \bar{T}[K] &= (1 + \bar{N}[K-1]) \cdot \frac{1}{\mu} \\ \bar{N}[K] &= K/M \\ \lambda[K] &= \bar{N}[K]/\bar{T}[K] \end{cases}$$

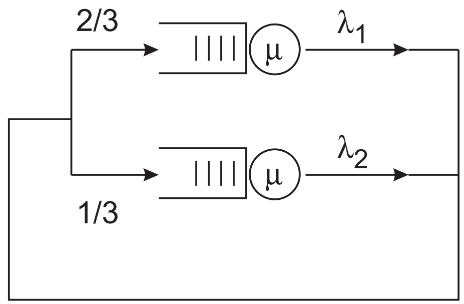
Lähtien alkuarvosta $\bar{N}[0] = 0$ ratkaistaan keskiarvot suuremmille populaatioille

$$\begin{cases} \bar{T}[1] &= \frac{1}{\mu} \\ \bar{N}[1] &= \frac{1}{M} \\ \lambda[1] &= \frac{1}{M}\,\mu \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{T}[2] &= \frac{M+1}{M}\frac{1}{\mu} \\ \bar{N}[2] &= \frac{2}{M} \\ \lambda[2] &= \frac{2}{M+1}\,\mu \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{T}[3] &= \frac{M+2}{M}\frac{1}{\mu} \\ \bar{N}[2] &= \frac{3}{M} \\ \lambda[2] &= \frac{3}{M+2}\,\mu \end{cases} \quad \ldots \quad \begin{cases} \bar{T}[K] &= \frac{M+K-1}{M}\frac{1}{\mu} \\ \bar{N}[K] &= \frac{K}{M} \\ \lambda[K] &= \frac{K}{M+K-1}\,\mu \end{cases}$$

Kun $K \ll M$ niin $\lambda[K] \approx \frac{K}{M}\mu$ (kierrokseen kuluva aika on M/μ, K kiertäjää).

Kun $K \gg M$ niin $\lambda[K] \approx \mu$ (kaikki jonot täynnä; asiakkaita lähtee keskim. $1/\mu$ väliajoin).

Esimerkki 2.



$K = 3$
Virtausyhtälöiden eräs ratkaisu on:
$\hat{\lambda}_1 = 2,\ \hat{\lambda}_2 = 1$

Lähtien alkuarvoista $\bar{N}_1[0] = \bar{N}_2[0] = 0$ ratkaistaan keskiarvot suuremmille populaatioille

$$K=1 \qquad \begin{cases} \bar{T}_1[1] = \frac{1}{\mu} \\ \bar{N}_1[1] = 1 \cdot \frac{2/\mu}{2/\mu+1/\mu} = \frac{2}{3} \\ \lambda_1[1] = \frac{2}{3}\,\mu \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{T}_2[1] = \frac{1}{\mu} \\ \bar{N}_2[1] = 1 \cdot \frac{1/\mu}{2/\mu+1/\mu} = \frac{1}{3} \\ \lambda_2[1] = \frac{1}{3}\,\mu \end{cases}$$

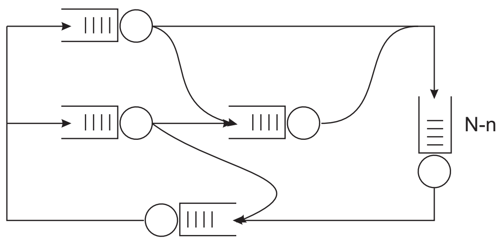
$$K=2 \qquad \begin{cases} \bar{T}_1[2] = (1+\frac{2}{3})\,\frac{1}{\mu} = \frac{5}{3}\,\frac{1}{\mu} \\ \bar{N}_1[2] = 2 \cdot \frac{2\cdot 5/3}{2\cdot 5/3+1\cdot 4/3} = \frac{10}{7} \\ \lambda_1[2] = \frac{6}{7}\,\mu \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{T}_2[2] = (1+\frac{1}{3})\,\frac{1}{\mu} = \frac{4}{3}\,\frac{1}{\mu} \\ \bar{N}_2[2] = 2 \cdot \frac{1\cdot 4/3}{2\cdot 5/3+1\cdot 4/3} = \frac{4}{7} \\ \lambda_2[2] = \frac{3}{7}\,\mu \end{cases}$$

$$K=3 \qquad \begin{cases} \bar{T}_1[3] = (1+\frac{10}{7})\,\frac{1}{\mu} = \frac{17}{7}\,\frac{1}{\mu} \\ \bar{N}_1[3] = 3 \cdot \frac{2\cdot 17/7}{2\cdot 17/7+1\cdot 11/7} = \frac{34}{15} \\ \lambda_1[3] = \frac{14}{15}\,\mu \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{T}_2[3] = (1+\frac{4}{7})\,\frac{1}{\mu} = \frac{11}{7}\,\frac{1}{\mu} \\ \bar{N}_2[3] = 3 \cdot \frac{1\cdot 11/7}{2\cdot 17/7+1\cdot 11/7} = \frac{11}{15} \\ \lambda_2[3] = \frac{7}{15}\,\mu \end{cases}$$

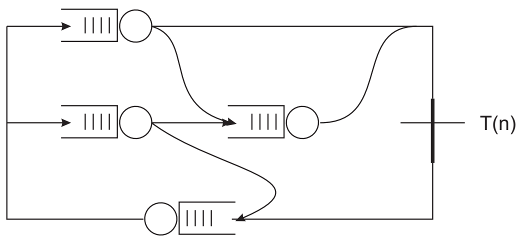
Nortonin teoreema

Jonoverkoille voidaan johtaa samantapainen Nortonin teoreema kuin mitä käytetään lineaaristen piirien analyysissä. Jonoverkkojen tapauksessa teoreema voidaan todistaa käyttäen hyväksi verkon tunnettua tasapainojakaumaa.

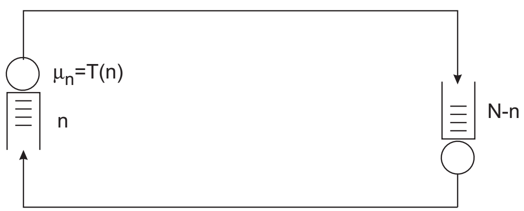
Kun ollaan kiinnostuneita vain verkon jonkun osan, esim. jonon i käyttäytymisestä, muu osa verkkoa voidaan korvata "ekvivalentilla jonolla".



N asiakasta koko verkossa.
$N - n$ asiakasta jonossa i.
n asiakasta muussa osassa verkkoa.



Lasketaan läpäisy (virta) $T(n)$ "oikosuljetulle" systeemille asiakkaiden lukumäärän n funktiona.



Muun verkon korvaavalla ekvivalentilla jonolla on tilariippuva palvelunopeus $T(n)$. Jono i käyttäytyy samoin kuin alkuperäisessä verkossa.