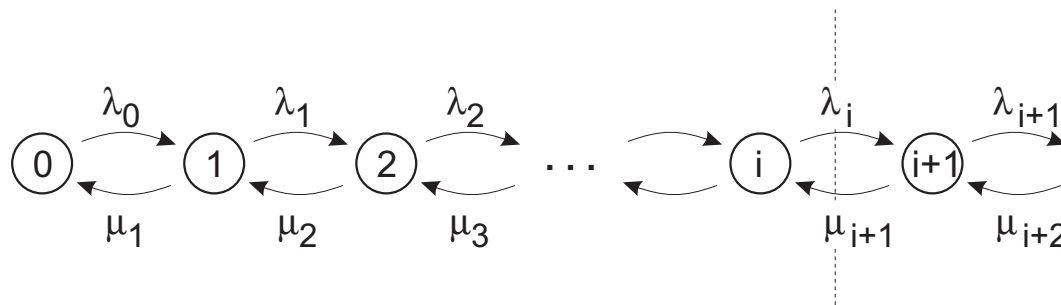


Syntymä-kuolema-prosessit

Yleistä

Syntymä-kuolema-prosessiksi (SK-prosessi) kutsutaan Markov-prosessia, jonka

- tila-avaruus on diskreetti
- tilat voidaan järjestää jonoksi, $i=0,1,2,\dots$ siten, että
- tilasiirtymiä voi tapahtua vain naapuritilojen välillä, $i \rightarrow i + 1$ tai $i \rightarrow i - 1$



Tilasiirtymänopeudet

$$q_{i,j} = \begin{cases} \lambda_i & \text{kun } j = i + 1 \\ \mu_i & \text{kun } j = i - 1 \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \text{syntymät. intervallissa } \Delta t \text{ on } \lambda_i \Delta t \\ \text{kuolemat. intervallissa } \Delta t \text{ on } \mu_i \Delta t \\ \text{kun systeemi on tilassa } i \end{array} \right.$$

SK-prosessin tasapainotilatodennäköisyydet

Käytetään leikkausmenetelmää = globaali tasapainoehto sovellettuna tilajoukkoon $0, 1, \dots, k$.

Tasapainotilassa todennäköisyysvirrat leikkauksen yli kumoavat toisensa (nettovirta = 0)

$$\lambda_k \pi_k = \mu_{k+1} \pi_{k+1} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Saadaan rekursiokaava

$$\pi_{k+1} = \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} \pi_k$$

Kaikki todennäköisyydet voidaan palauttaa rekursioon avulla tilan 0 todennäköisyyteen π_0

$$\pi_k = \frac{\lambda_{k-1} \lambda_{k-2} \cdots \lambda_0}{\mu_k \mu_{k-1} \cdots \mu_1} \pi_0 = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \pi_0$$

Soveltamalla normiehtoa $\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1$, voidaan määrätä π_0

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \cdots} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}$$

SK-prosessin ajasta riippuvat ratkaisut

Edellä tutkittiin SK-prosessin tasapainojakaumaa $\boldsymbol{\pi}$.

Joskus tunnetaan tilatodennäköisyydet hetkellä 0, $\boldsymbol{\pi}(0)$,

- tavallisin tilanne on se, että systeemin tiedetään olevan hetkellä 0 täsmälleen jossakin tilassa k ; tällöin $\pi_k(0) = 1$ ja $\pi_j(0) = 0$, kun $j \neq k$

ja halutaan selvittää, miten tilatodennäköisyydet kehittyvät ajan funktiona eli $\boldsymbol{\pi}(t)$

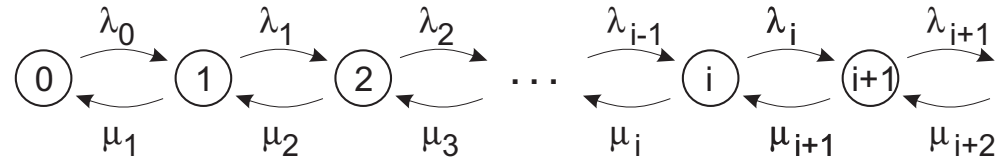
- tiedetään, että $\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}$.

Tämä määräytyy yhtälöstä

$$\boxed{\frac{d}{dt} \boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}(t) \cdot \mathbf{Q}} \quad \text{missä}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & \dots & \dots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3 + \mu_3) & \lambda_3 \\ \vdots & \vdots & 0 & \mu_4 & -(\lambda_4 + \mu_4) \end{pmatrix}$$

SK-prosessin ajasta riippuvat ratkaisut (jatkoa)



Yhtälöt komponenttimuodossa

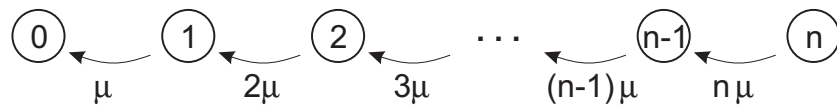
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\pi_i(t)}{dt} = \underbrace{-(\lambda_i + \mu_i)\pi_i(t)}_{\text{virrat ulos}} + \underbrace{\lambda_{i-1}\pi_{i-1}(t) + \mu_{i+1}\pi_{i+1}(t)}_{\text{virrat sisään}} \quad i = 1, 2, \dots \\ \frac{d\pi_0(t)}{dt} = \underbrace{-\lambda_0\pi_0(t)}_{\text{virta ulos}} + \underbrace{\mu_1\pi_1(t)}_{\text{virta sisään}} \end{array} \right.$$

Esim. 1. Puhdas kuolemaprosessi

$$\begin{cases} \lambda_i = 0 \\ \mu_i = i\mu \end{cases} \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad \pi_i(0) = \begin{cases} 1 & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases}$$

jokaisella yksilöllä kuolemisnopeus on vakio μ

systemi lähtee tilasta n



Tila 0 on absorboiva tila, muut tilat ovat transientteja

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \pi_n(t) = -n\mu\pi_n(t) \\ \frac{d}{dt} \pi_i(t) = (i+1)\mu\pi_{i+1}(t) - i\mu\pi_i(t) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \pi_n(t) = e^{-n\mu t} \\ \pi_i(t) = (i+1)\mu\pi_{i+1}(t) - i\mu\pi_i(t) \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\frac{d}{dt}(e^{i\mu t} \pi_i(t)) = (i+1)\mu\pi_{i+1}(t)e^{i\mu t} \quad \Rightarrow \quad \pi_i(t) = (i+1)e^{-i\mu t} \mu \int_0^t \pi_{i+1}(t')e^{i\mu t'} dt'$$

$$\pi_{n-1}(t) = ne^{-(n-1)\mu t} \mu \int_0^t \underbrace{e^{-n\mu t'} e^{(n-1)\mu t'}}_{e^{-\mu t'}} dt' = ne^{-(n-1)\mu t} (1 - e^{-\mu t})$$

Rekursiivisesti

$$\pi_i(t) = \binom{n}{i} (e^{-\mu t})^i (1 - e^{-\mu t})^{n-i}$$

Binomijakauma: jokainen on muista riippumatta hetkellä t elossa tn :llä $e^{-\mu t}$

Esim. 2. Puhdas syntymäprosessi (Poisson-prosessi)

$$\begin{cases} \lambda_i = \lambda \\ \mu_i = 0 \end{cases} \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad \pi_i(0) = \begin{cases} 1 & i = 0 \\ 0 & i > 0 \end{cases}$$

syntymätodennäköisyys aikayksikköä kohden on vakio λ

alkuhetkellä populaatio on 0



Kaikki tilat ovat transientteja

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \pi_i(t) = -\lambda \pi_i(t) + \lambda \pi_{i-1}(t) & i > 0 \\ \frac{d}{dt} \pi_0(t) = -\lambda \pi_0(t) & \Rightarrow \pi_0(t) = e^{-\lambda t} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t} \pi_i(t)) = \lambda \pi_{i-1}(t) e^{\lambda t} \Rightarrow \pi_i(t) = e^{-\lambda t} \lambda \int_0^t \pi_{i-1}(t') e^{\lambda t'} dt'$$

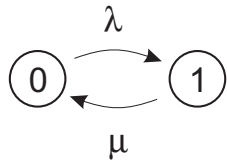
$$\pi_1(t) = e^{-\lambda t} \lambda \int_0^t \underbrace{e^{-\lambda t'} e^{\lambda t'}}_1 dt' = e^{-\lambda t} (\lambda t)$$

Rekursiivisesti

$$\pi_i(t) = \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}$$

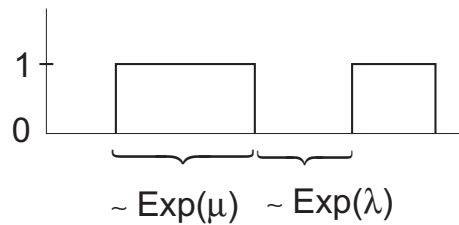
Syntymien lkm välillä $(0, t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$

Esim. 3. Yhden palvelimen järjestelmä



- vakio saapumisnopeus λ (Poisson-saapumiset)
- palvelun päättymisnopeus μ (exp. palveluaikajak.)

Järjestelmän tilat



- { 0 palvelin vapaa
- { 1 palvelin käytössä

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \pi_0(t) = -\lambda\pi_0(t) + \mu\pi_1(t) \\ \frac{d}{dt} \pi_1(t) = \lambda\pi_0(t) - \mu\pi_1(t) \end{cases} \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

Lasketaan yhtälöt yhteen

$$\frac{d}{dt}(\pi_0(t) + \pi_1(t)) = 0 \Rightarrow \pi_0(t) + \pi_1(t) = \text{vakio} = 1 \Rightarrow \pi_1(t) = 1 - \pi_0(t)$$

$$\frac{d}{dt}\pi_0(t) + (\lambda + \mu)\pi_0(t) = \mu \Rightarrow \frac{d}{dt}(e^{(\lambda+\mu)t}\pi_0(t)) = \mu e^{(\lambda+\mu)t}$$

$$\pi_0(t) = \underbrace{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}_{\text{tasapaino-}} + \underbrace{\left(\pi_0(0) - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)}_{\text{poikkeama}} \underbrace{e^{-(\lambda+\mu)t}}_{\text{häviää eksponen-}} \underbrace{\phantom{e^{-(\lambda+\mu)t}}}_{\text{tiaalisesti}}$$

$$\pi_1(t) = \underbrace{\frac{\lambda}{\lambda+\mu}}_{\text{tasapaino-}} + \underbrace{\left(\pi_1(0) - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)}_{\text{poikkeama}} \underbrace{e^{-(\lambda+\mu)t}}_{\text{häviää eksponen-}} \underbrace{\phantom{e^{-(\lambda+\mu)t}}}_{\text{tiaalisesti}}$$

Markov-järjestelmien analyysi: yhteenveto

1. Etsi järjestelmälle tilakuvaus

- tähän ei ole valmista reseptiä
- usein sopiva tilakuvaus on ilmeinen
- joskus vaatii enemmän ajattelua
- systeemi voi olla markovinen jonkin tilakuvauksen suhteen ja ei-markovinen jonkin toisen tilakuvauksen suhteen (jolloin tila-informaatio ei ole riittävä)
- tilakuvauksen löytäminen on ongelman luova osa

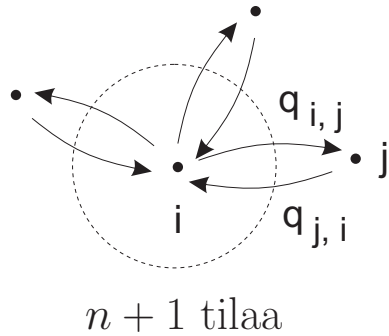
2. Määrää tilasiirtymänopeudet

- suoraviivainen tehtävä, kun eksponentiaaliset pitoajat ja saapumisväliajat

3. Ratkaise tasapainoyhtälöt

- periaatteessa suoraviivainen tehtävä (lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisu)
- tuntemattomien määrä (tilojen lukumäärä) voi olla hyvin suuri
- usein voidaan hyödyntää tilakaavion erityispiirteitä

Globaali tasapainoehto



$$\boxed{\sum_{j \neq i} \pi_j q_{j,i} = \sum_{j \neq i} \pi_i q_{i,j}}$$

virta tilaan i
virta tilasta i

$i = 0, 1, \dots, n$
 yksi yhtälö kutakin tilaa kohden

$$\underbrace{(\pi_0, \dots, \pi_n)}_{\boldsymbol{\pi}} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} -\sum_j q_{0,j} & q_{0,1} & q_{0,2} & \dots & q_{0,n} \\ q_{1,0} & -\sum_j q_{1,j} & q_{1,2} & \dots & q_{1,n} \\ q_{2,0} & q_{2,1} & -\sum_j q_{2,j} & \dots & q_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n,0} & q_{n,1} & q_{n,2} & \dots & -\sum_j q_{n,j} \end{pmatrix}}_{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

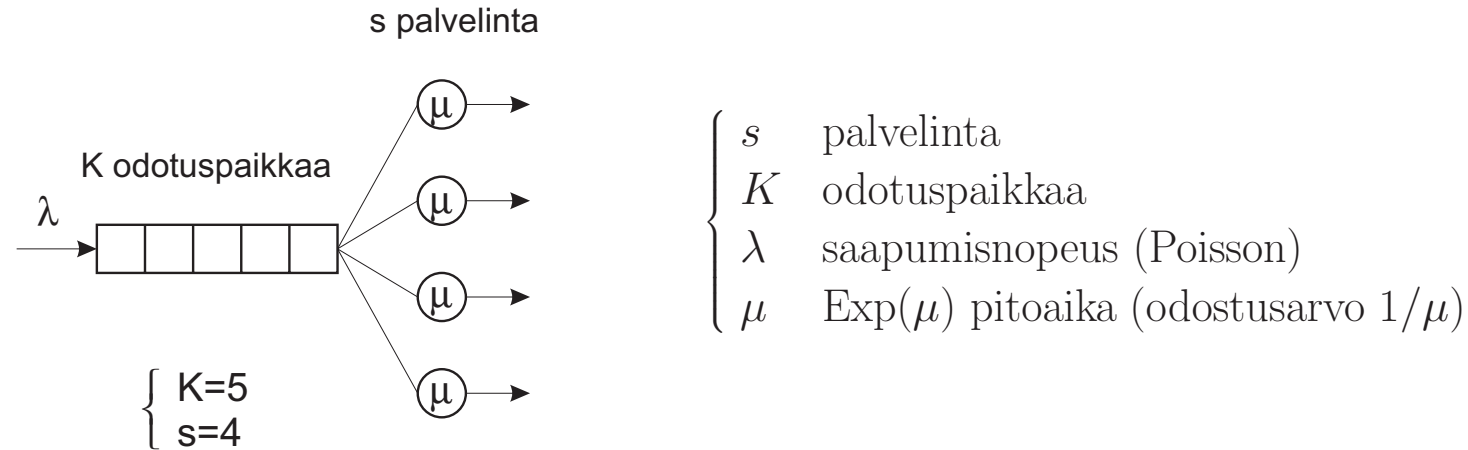
$$\boxed{\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{0}}$$

yksi yhtälö on
 redundantti

$$\boxed{\pi_0 + \pi_1 + \dots + \pi_n = 1}$$

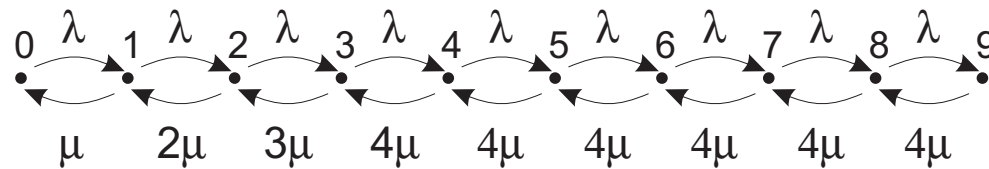
normiehto

Esim. 1. Jonojärjestelmä



Asiakkaiden lukumäärä N kelpaa tilaparametriksi

- määrää yksikäsitteisesti palvelussa olevien ja odottavien asiakkaiden lukumäärät
- minkä tahansa saapumisen tai poistumisen jälkeen palveltavana olevien asiakkaiden jäljelläolevat palveluajat ovat Exp(μ)-jakautuneita (muistittomuus)

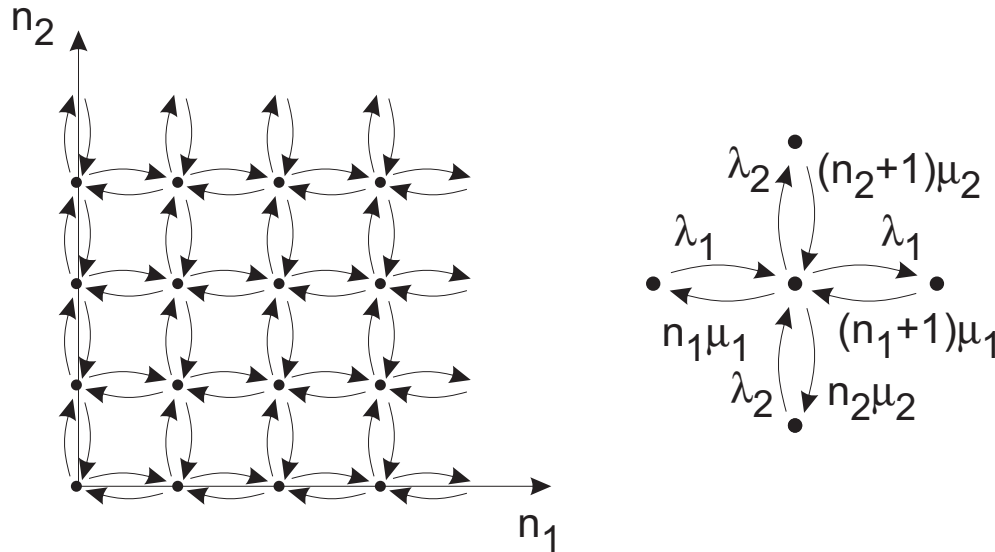


Esim. 2. Kutsueto ATM-verkossa

ATM-verkon virtuaaliväylälle (VP) tarjotaan kahdenlaisia kutsuja.

$$\begin{cases} R_1 = 1\text{Mbps} \\ \lambda_1 = \text{saapumisnopeus} \\ \mu_1 = \text{keskim. pitoaika} \end{cases} \quad \begin{cases} R_2 = 2\text{Mbps} \\ \lambda_2 = \text{saapumisnopeus} \\ \mu_2 = \text{keskim. pitoaika} \end{cases}$$

a) Väylän kapasiteetti on suuri (ääretön)



Kutsuesto ATM-verkossa (jatkoa)

b) Väylän kapasiteetti on 4.5 Mbps

