JATKUVAT JAKAUMAT

Laplace-muunnos (Laplace-Stieltjes-muunnos)

Määritelmä

Ei-negatiivisen satunnaismuuttujan $X \geq 0$, jonka tiheysfunktio on $f(x)$, Laplace-muunnos $f^*(s)$ määritellään

$$\boxed{f^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \mathrm{E}[e^{-sX}]} \quad = \int_0^\infty e^{-st} dF(t) \qquad \text{merkitään myös } \mathcal{L}_X(s)$$

- Matemaattisesti kyseessä on siis tiheysfunktion Laplace-muunnos.
- Jatkuvien satunnaismuuttujien käsittelyssä L-muunnoksella on sama rooli kuin generoivalla funktiolla diskreettien muuttujien tapauksessa.
  - jos X on diskreetti kokonaislukuarvoinen (≥ 0) sm, niin pätee $f^*(s) = \mathcal{G}(e^{-s})$

Summan Laplace-muunnos

Olkoot X ja Y riippumattomia ja niiden L-muunnokset $f_X^*(s)$ ja $f_Y^*(s)$.

$$\begin{aligned} f_{X+Y}^*(s) &= \mathrm{E}[e^{-s(X+Y)}] \\ &= \mathrm{E}[e^{-sX}e^{-sY}] \\ &= \mathrm{E}[e^{-sX}]\mathrm{E}[e^{-sY}] \qquad \text{(riippumattomuus)} \\ &= f_X^*(s)f_Y^*(s) \end{aligned}$$

$$\boxed{f_{X+Y}^*(s) = f_X^*(s)f_Y^*(s)}$$

Momenttien laskeminen Laplace-muunnoksen avulla

Derivoimalla nähdään

$$f^{*\prime}(s) = \frac{d}{ds}\mathrm{E}[e^{-sX}] = \mathrm{E}[-Xe^{-sX}]$$

Vastaavasti n:s derivaatta on

$$f^{*(n)}(s) = \frac{d^n}{ds^n}\mathrm{E}[e^{-sX}] = \mathrm{E}[(-X)^n e^{-sX}]$$

Määräämällä näiden arvot pisteessä $s = 0$ saadaan

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{E}[X] &= -f^{*\prime}(0) \\ \mathrm{E}[X^2] &= +f^{*\prime\prime}(0) \\ &\vdots \\ \mathrm{E}[X^n] &= (-1)^n f^{*(n)}(0) \end{aligned}}$$

Satunnaissumman Laplace-muunnos

Tarkastellaan satunnaissummaa

$$Y = X_1 + \cdots + X_N$$

missä X_i:t ovat *i.i.d.* yhteisen L-muunnoksen ollessa $f_X^*(s)$ ja
$N \geq 0$ on kokonaislukuarvoinen sm, jonka generoiva funktio on $\mathcal{G}_N(z)$.

$$\begin{aligned}
f_Y^*(s) &= \mathrm{E}[e^{-sY}] \\
&= \mathrm{E}[\mathrm{E}\left[e^{-sY} \,|\, N\right]] && \text{(ulompi odotusarvo } N\text{:n vaihteluiden yli)} \\
&= \mathrm{E}[\mathrm{E}\left[e^{-s(X_1+\cdots+X_N)} \,|\, N\right]] && \text{(sisemmässä odotusarvossa } N \text{ kiinteä)} \\
&= \mathrm{E}[\mathrm{E}[e^{-s(X_1)}] \cdots \mathrm{E}[e^{-s(X_N)}]] && \text{(riippumattomuus)} \\
&= \mathrm{E}[(f_X^*(s))^N] \\
&= \mathcal{G}_N(f_X^*(s)) && \text{(määritelmän mukaan } \mathrm{E}[z^N] = \mathcal{G}_N(z)\text{)}
\end{aligned}$$

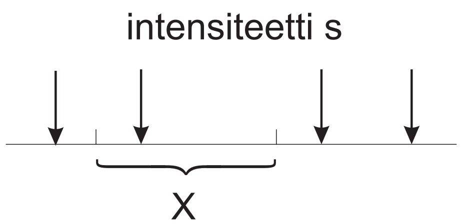
Laplace-muunnos ja kollektiivisten merkkien menetelmä

Annetaan Laplace-muunnokselle

$$f^*(s) = \mathrm{E}[e^{-sX}] \qquad X \geq 0$$

Tulkinta: Ajatellaan, että X edustaa jonkin välin pituutta. Altistetaan tämä väli poissoniselle merkintäprosessille, jonka intensiteetti on s. Tällöin Laplace-muunnos $f^*(s)$ on todennäköisyys sille, että väli on merkitön.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{X \text{ on merkitön}\} &= \mathrm{E}[\mathrm{P}\{X \text{ on merkitön} \,|\, X\}] \qquad \text{(kokonaistodennäköisyys)} \\ &= \mathrm{E}[\mathrm{P}\{\text{välillä } X \text{ on 0 tapahtumaa} \,|\, X\}] \\ &= \mathrm{E}[e^{-sX}] \;=\; f^*(s) \end{aligned}$$



$$\mathrm{P}\{\text{välillä } X \text{ on } n \text{ tapahtumaa} \,|\, X\} = \frac{(sX)^n}{n!} e^{-sX}$$

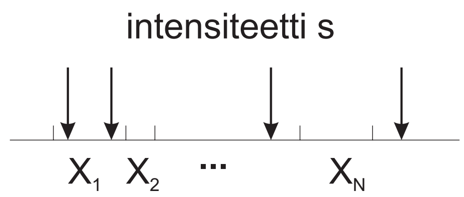
$$\mathrm{P}\{\text{välillä } X \text{ on 0 tapahtumaa} \,|\, X\} = e^{-sX}$$

Kollektiivisten merkkien menetelmä (jatkoa)

<u>Esimerkki:</u> Satunnaissumman Laplace-muunnos

$$Y = X_1 + \cdots + X_N \ , \quad \text{missä}$$

$$\begin{cases} X_1 \sim X_2 \sim \cdots \sim X_N, \ \text{yhteinen L-muunnos } f^*(s) \\ N \text{ on sm., jonka generoiva funktio on } \mathcal{G}_N(z) \end{cases}$$



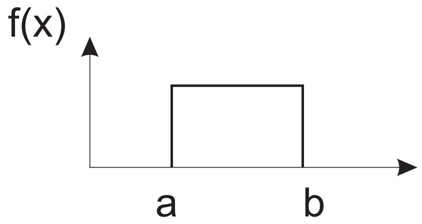
$$\begin{aligned} f_Y^*(s) &= \mathrm{P}\{\text{välin } Y \text{ mikään osaväli ei ole merkitty}\} \\ &= \underbrace{\mathcal{G}_N(\underbrace{f_X^*(s)}_{\substack{\text{tn. että yksittäi-}\\ \text{nen osaväli ei ole}\\ \text{merkitty}}})}_{\substack{\text{tn. että mikään osaväli ei}\\ \text{ole merkitty}}} \end{aligned}$$

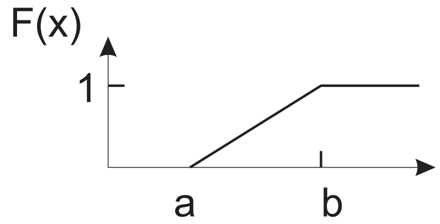
Tasainen jakauma $X \sim \mathrm{U}(a, b)$ (uniform distribution)

X:n tiheysfunktiolla on vakioarvo välillä (a, b):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

eli arvo X on valittu väliltä (a, b) umpimähkään.





$$\mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathrm{V}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f(x) dx = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Tasainen jakauma (jatkoa)

Olkoon $U_1, \ldots, U_n$ joukko riippumatomia tasanjakautuneita sm:jia, $U_i \sim \mathrm{U}(0, 1)$

- Niiden muuttujien lukumäärä, jotka ovat $\leq x$ $(0 \leq x \leq 1))$ on $\sim \mathrm{Bin}(n, x)$
  - tapahtuma $\{U_i \leq x\}$ määrittelee Bernoulli-kokeen, jossa onnistumistn. on x
- Olkoon $U_{(1)}, \ldots, U_{(n)}$ suuruusjärjestykseen pantujen arvojen jono.
  Määritellään lisäksi $U_{(0)} = 0$ ja $U_{(n+1)} = 1$.
  Voidaan osoittaa, että kaikki välit ovat samoinjakautuneita ja

  $$\mathrm{P}\{U_{(i+1)} - U_{(i)} > x\} = (1 - x)^n \qquad i = 1, \ldots, n$$

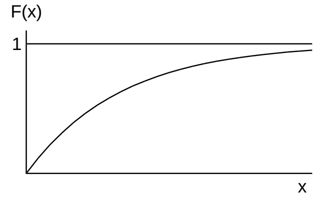
  - ensimmäiselle välille $U_{(1)} - U_{(0)} = U_{(1)}$ tulos on selvä, koska $U_{(1)} = \min(U_1, \ldots, U_n)$

Eksponenttijakauma $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

(Huom. Joskus parameriksi kirjoitetaan $1/\lambda$ eli jakauman keskiarvo)

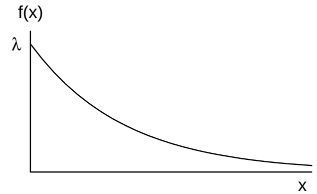
X on ei-negatiivinen jatkuva sm, jonka kertymäfunktio on

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



ja tiheysfunktio

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



Esim. puheluiden saapumisväli; puhelun kesto

Eksponenttijakauman Laplace-muunnos ja momentit

Exp(λ)-jakautuneen satunnaismuuttujan Laplace-muunnos on

$$f^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{\lambda}{\lambda + s}$$

Tämän avulla lasketaan momentit:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X] &= -f^{*\prime}(0) &= \left.\tfrac{\lambda}{(\lambda+s)^2}\right|_{s=0} = \tfrac{1}{\lambda} \\ \mathrm{E}[X^2] &= +f^{*\prime\prime}(0) &= \left.\tfrac{2\lambda}{(\lambda+s)^3}\right|_{s=0} = \tfrac{2}{\lambda^2} \\ \mathrm{V}[X] &= \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2 &= \tfrac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{E}[X] = \frac{1}{\lambda} \qquad \mathrm{V}[X] = \frac{1}{\lambda^2}}$$

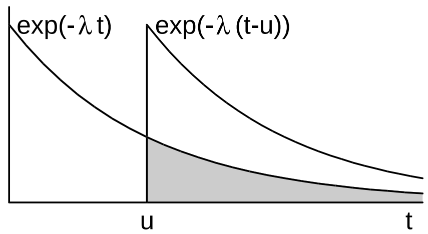
Eksponenttijakauman muistittomuusominaisuus

Oletetaan, että $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ edustaa esim. yhteyden kestoa.

Kysytään, mikä on tn. että yhteys kestää vielä vähintään ajan x, jos se on jo kestänyt ajan t:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\{X > t + x \,|\, X > t\} &= \frac{\mathrm{P}\{X > t + x, X > t\}}{\mathrm{P}\{X > t\}} \\
&= \frac{\mathrm{P}\{X > t + x\}}{\mathrm{P}\{X > t\}} \\
&= \frac{e^{-\lambda(t+x)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda x} = \mathrm{P}\{X > x\}
\end{aligned}
$$

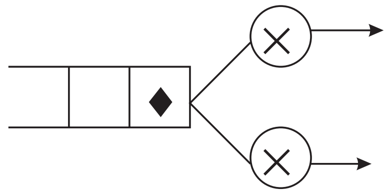
$$\boxed{\mathrm{P}\{X > t + x \,|\, X > t\} = \mathrm{P}\{X > x\}}$$



- Yhteyden jäljelläolevan keston jakauma ei riipu lainkaan siitä, kauanko yhteys on jo jatkunut
- On samalla tavalla $\text{Exp}(\lambda)$-jakautunut kuin yhteyden kokonaiskesto.

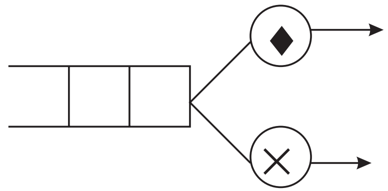
Esimerkki muistittomuusominaisuudesta

Jonojärjestelmässä on kaksi palvelinta. Palveluajat ovat eksponentiaalisesti jakautuneita. Asiakkaan ($\diamond$) saapuessa molemmat palvelimet ovat varattuja ($\times$) mutta muita odottavia asiakkaita ei ole.



Kysytään: mikä on todennäköisyys, että asiakas ($\diamond$) poistuu järjestelmästä viimeisenä?

Seuraava tapahtuma järjestelmässä on se, että jompikumpi asiakkaista ($\times$) poistuu ja asiakas ($\diamond$) siirtyy vapautuneeseen palvelimeen.



Muistittomuudesta johtuen tästä hetkestä eteenpäin kummankin asiakkaan ($\diamond$) ja ($\times$) palveluajat (jäljellä oleva palveluaika) ovat samalla tavalla exp-jakautuneet. Tilanne on täysin symmetrinen ja siten todennäköisyys, että asiakas ($\diamond$) poistuu viimeisenä, on 1/2.

Eksponenttijakautuneen suureen päättymistodennäköisyys

Oletetaan, että kestoltaan Exp(λ)-jakautunut yhteys on jatkunut ajan t.
Mikä on todennäköisyys, että se päättyy (infinitesimaalisen) lyhyen ajan h kuluessa?

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{X \le t + h \,|\, X > t\} &= \mathrm{P}\{X \le h\} \quad \text{(muistittomuus)} \\ &= 1 - e^{-\lambda h} \\ &= 1 - (1 - \lambda h + \tfrac{1}{2}(\lambda h)^2 - \cdots) \\ &= \lambda h + \mathcal{O}(h) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Päättymistodennäköisyys aikayksikköä kohden} = \lambda}$ (vakio!)

Eksponenttijakautuneiden suureiden minimi ja maksimi

Oletetaan $X_1 \sim \cdots \sim X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ $\qquad$ (*i.i.d.*)

Näiden minimin häntätodennäköisyys on

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{\min(X_1,\ldots,X_n) > x\} &= \mathrm{P}\{X_1 > x\}\cdots\mathrm{P}\{X_n > x\} \qquad \text{(riippumattomuus)} \\ &= (e^{-\lambda x})^n = e^{-n\lambda x} \end{aligned}$$

Minimi noudattaa siis jakaumaa $\mathrm{Exp}(n\lambda)$.

$\boxed{\text{Minimin päättymistiheys} = n\lambda}$

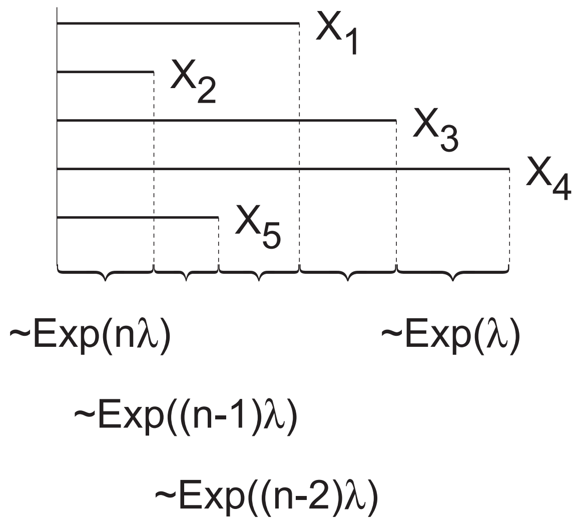
n rinnakkaista prosessia, joista kukin päättyy muista riippumatta intensiteetillä λ

Maksimin kertymäfunktio on

$$\mathrm{P}\{\max(X_1,\ldots,X_n) \le x\} = (1 - e^{-\lambda x})^n$$

Odotusarvo voidaan päätellä kuvan tarkastelun avulla

$$\mathrm{E}[\max(X_1,\ldots,X_n)] = \frac{1}{n\lambda} + \frac{1}{(n-1)\lambda} + \cdots + \frac{1}{\lambda}$$



Erlangin jakauma $X \sim$ Erlang(n, λ)

Merkitään myös Erlang-$n(\lambda)$.

X on n:n riippumattoman Exp(λ)-jakautuneen sataunnaismuuttujan summa

$$X = X_1 + \cdots + X_n \qquad\qquad X_i \sim \text{Exp}(\lambda) \quad (i.i.d.)$$

Sen Laplace-muunnos on

$$f^*(s) = (\frac{\lambda}{\lambda + s})^n$$

Käänteismuuntamalla (tai rekursiivisesti tiheysfunktioita konvoluoimalla) saadaan summan tiheysfunktio

$$\boxed{f(x) \;=\; \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\,\lambda e^{-\lambda x}} \qquad x \geq 0$$

Erlangin jakauma (jatkoa): gammajakauma

Erlangin jakauman tiheysfunktion kaava voidaan yleistää kokonaislukujen n asemesta mielivaltaisille positiivisille reaaliarvoille korvaamalla kertomafunktio $(n-1)!$ reaaliarvoisella yleistyksellään eli gammafunktiolla $\Gamma(n)$:

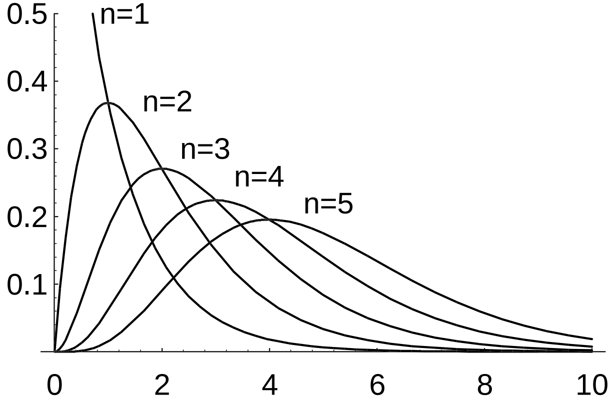
$$\boxed{f(x) \;=\; \frac{(\lambda x)^{p-1}}{\Gamma(p)}\lambda e^{-\lambda x}}$$

Gamma(p, λ)-jakauma

Gammafunktio $\Gamma(p)$ määritellään

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-u} u^{p-1} du$$

Osittaisintegroinnilla on helppo nähdä, että kun p on kokonaisluku, niin todellakin $\Gamma(p) = (p-1)!$

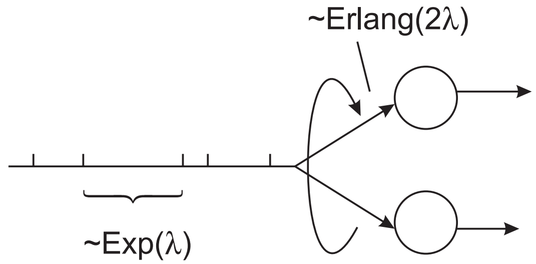


Odotusarvo ja varianssi ovat n-kertaiset Exp(λ)-jakauman vastaaviin:

$$\boxed{\mathrm{E}[X] = \frac{n}{\lambda} \qquad \mathrm{V}[X] = \frac{n}{\lambda^2}}$$

Erlangin jakauma (jatkoa)

Esimerkki. Järjestelmässä on kaksi palvelinta. Asiakkaita saapuu Exp(λ)-jakautunein väliajoin. Joka toinen asiakas ohjataan palvelimeen 1 ja joka toinen palevelimeen 2.

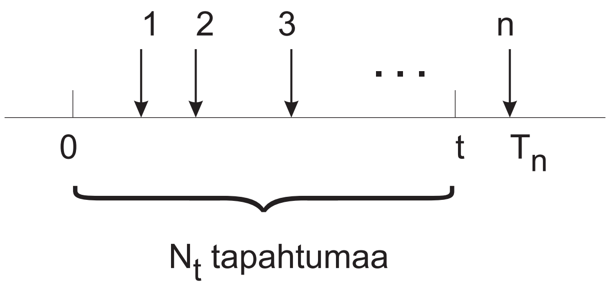


Palvelimeen saapuvien asiakkaiden väliaikajakauma on Erlang$(2, \lambda)$.

Lause. Olkoon N_t tapahtumien lukumäärä t:n pituisella välillä Poisson-jakautunut:

$$N_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$$

Tällöin aika T_n mielivaltaisesta tapahtumasta n:nteen tapahtumaan sen jälkeen noudattaa jakaumaa Erlang(n, λ).



Todistus.

$$\begin{aligned}
F_{T_n}(t) &= \mathrm{P}\{T_n \le t\} = \mathrm{P}\{N_t \ge n\} \\
&= \sum_{i=n}^{\infty} \mathrm{P}\{N_t = i\} = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{T_n} = \frac{d}{dt} F_{T_n}(t) &= \sum_{i=n}^{\infty} \frac{i\lambda\,(\lambda t)^{i-1}}{i!} e^{-\lambda t} - \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \lambda e^{-\lambda t} \\
&= \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{i-1}}{(i-1)!} \lambda e^{-\lambda t} - \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \lambda e^{-\lambda t} \\
&= \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

Normaalijakauma $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

Parametreilla μ ja σ^2 normaalijakautuneen satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2}}$$

Parametrit μ ja σ^2 ovat jakauman keskiarvo ja varianssi

$$\boxed{\begin{cases} \mathrm{E}[X] = \mu \\ \mathrm{V}[X] = \sigma^2 \end{cases}}$$

Lause: Jos $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, niin $Y = \alpha X + \beta \sim \mathrm{N}(\alpha\mu + \beta, \alpha^2\sigma^2)$.

Todistus:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathrm{P}\{Y \le y\} = \mathrm{P}\{X \le \tfrac{y-\beta}{\alpha}\} = F_X(\tfrac{y-\beta}{\alpha}) \\ &= \int_{-\infty}^{(y-\beta)/\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2} dx \qquad z = \alpha x + \beta \\ &= \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\alpha\sigma)} e^{-\frac{1}{2}(z-(\alpha\mu+\beta))^2/(\alpha\sigma)^2} dz \end{aligned}$$

Seuraus: $$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1) \qquad (\alpha = 1/\sigma,\ \beta = -\mu/\sigma)$$

Merkitään $\Phi(x)$:llä N(0,1)-muuttujan kertymäfunktiota. Tällöin

$$F_X(x) = \mathrm{P}\{X \le x\} = \mathrm{P}\{Z \le \tfrac{x-\mu}{\sigma}\} = \Phi(\tfrac{x-\mu}{\sigma})$$

Monen muuttujan gaussinen jakauma

Olkoon $X_1, \ldots, X_n$ joukko gaussisia (ts. normaalijakautuneita) satunnaismuuttujia, joiden odotusarvot ovat $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ja kovarianssimatriisi

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \cdots & \sigma_{1n}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1}^2 & \cdots & \sigma_{nn}^2 \end{pmatrix} \qquad \sigma_{ij}^2 = \mathrm{Cov}[X_i, X_j] \qquad (\sigma_{ii}^2 = \mathrm{V}[X_i])$$

Merkitään $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^{\mathrm{T}}$.

Satunnaisvektorin $\mathbf{X}$ tiheysfunktio on

$$\boxed{f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\mathbf{\Gamma}|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\mathbf{\Gamma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}}$$

missä $|\mathbf{\Gamma}|$ on kovarianssimatriisin determinantti.

Muuttujanvaihdolla nähdään helposti, että satunnaisvektorin $\mathbf{Z} = \mathbf{\Gamma}^{-1/2}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})$ tiheysfunktio on $(2\pi)^{-n/2}\exp(-\frac{1}{2}\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}) = \sqrt{2\pi}e^{-z_1^2/2} \cdots \sqrt{2\pi}e^{-z_n^2/2}$.

Siten vektorin $\mathbf{Z}$ komponentit ovat <u>riippumattomia N(0,1)-jakautuneita</u> satunnaismuuttujia.

Kääntäen $\boxed{\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{\Gamma}^{1/2}\mathbf{Z}}$, jonka avulla voidaan generoida $\mathbf{X}$:n arvoja simuloinneissa.