

# AJAN KÄÄNTÖ JA KÄÄNTYVÄT PROSESSIT

## Käännetty prosessi

Tarkastellaan pelkistymätöntä stationaarista stokastista prosessia  $X_t$ .

Tähän prosessiin voidaan liittää ns. käännetty prosessi  $X_t^*$ , jossa prosessin  $X_t$  kulkua tarkastellaan käännetyissä ajassa (“filmi pyöritetään trakaperin”).

$$X_t^* = X_{\tau-t}$$

Ajan kääntö hetken  $\tau$  suhteen.

Parametri  $\tau$  on epäolennainen; se määrittelee vain mihin kohtaan käännetyissä prosessissa sijoitamme ajan origon.

## Miksi halutaan tutkia käännettyä prosessia

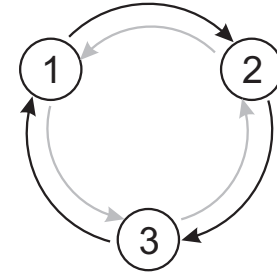
- Osoittautuu, että sen avulla saadaan lisänäkemyksiä prosessin ominaisuuksista.
- Monasti käänneisen prosessin tarkastelun avulla voidaan hyvin yksinkertaisesti ja elegantisti johtaa tuloksia, joiden suoraviivainen johtaminen vaatisi mutkikkaita laskuja.
- Esimerkiksi monimutkaisen järjestelmän tasapainoyhtälöt voidaan ratkaista “arvaamalla” käännetty prosessi.
- Jonojärjestelmän lähtöprosessin (ulostulo) ominaisuudet voidaan usein helpoiten selvittää tutkimalla käännettyä prosessia.

## Käännetty prosessi (jatkoa)

Yleensä ajassa käännetty prosessi  $X_t^*$  on eri prosessi kuin alkuperäinen prosessi.

Esimerkki: Syklinen (jaksollinen) prosessi.

Prosessissa  $X_t$  tilat esiintyvät sekvenssissä  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ .  
Käännetyssä prosessissa sekvenssi on  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ . Selvästikään ei voi olla kysymyksessä sama prosessi.



### Käännetyn prosessin tasapainojakauma

Oletetaan, että prosessilla  $X_t$  on tasapainojakauma  $\pi_i = P\{X_t = i\}$ .

Tällöin myös käännetyllä prosessilla  $X_t^*$  on tasapainojakauma  $\pi_i^* = P\{X_t^* = i\}$  ja tämä jakauma on sama kuin alkuperäisellä prosessilla

$$\pi_i^* = \pi_i \quad \forall i$$

Perustelu.  $\pi_i$  ja  $\pi_i^*$  edustavat niitä osuuksia ajasta, jonka prosessit  $X_t$  ja  $X_t^*$  viettävät tilassa  $i$ . Aikaosuus on riippumaton siitä, kummassa suunnassa prosessia tarkastellaan.

## Kääntyvä prosessi

Jos prosessin  $X_t$  käännetty prosessi  $X_t^*$  on tilastollisesti identtinen alkuperäisen prosessin kanssa, sanotaan että prosessi  $X_t$  on ajassa kääntyvä.

Täsmällisesti määriteltynä kääntyvyys tarkoittaa sitä, että

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) \sim (X_{\tau-t_1}, X_{\tau-t_2}, \dots, X_{\tau-t_n}) \quad \text{kaikilla arvoilla } t_1, t_2, \dots, t_n \text{ ja } \tau \text{ ja } n$$

ts. kyseisillä arvojoukoilla on samat yhteisjakaumat.

- Intuitiivisesti prosessin  $X_t$  kääntyvyys tarkoittaa sitä, että ulkopuolinen tarkkailija ei pysty kertomaan “ajetaanko filmiä oikeinpäin vai takaperin”.

## Markovin ketju käännetyssä ajassa

Lause. Markovin ketjun  $\dots, X_{n-1}, X_n, X_{n+1}, \dots$  käännetty ketju  $\dots, X_{n+1}, X_n, X_{n-1}, \dots$  muodostaa Markovin ketjun.

Todistus. Tarkastellaan arvon  $X_m = j$  todennäköisyyttä ehdollistettuna sitä seuraaviin arvoihin  $X_{m+1} = i, X_{m+2} = i_2, \dots, X_{m+k}$ , jotka käännetyssä ajassa ovat edeltäviä arvoja:

$$\begin{aligned}
 & P\{X_m = j \mid X_{m+1} = i, X_{m+2} = i_2, \dots, X_{m+k} = i_k\} \\
 &= \frac{P\{X_m = j, X_{m+1} = i, X_{m+2} = i_2, \dots, X_{m+k} = i_k\}}{P\{X_{m+1} = i, X_{m+2} = i_2, \dots, X_{m+k} = i_k\}} \\
 &= \frac{P\{X_m = j, X_{m+1} = i\} P\{X_{m+2} = i_2, \dots, X_{m+k} = i_k \mid \overbrace{X_m = j}^{\text{ei riipu tästä, Markov!}}, X_{m+1} = i\}}{P\{X_{m+1} = i\} P\{X_{m+2} = i_2, \dots, X_{m+k} = i_k \mid X_{m+1} = i\}} \\
 &= \frac{P\{X_m = j, X_{m+1} = i\}}{P\{X_{m+1} = i\}} \\
 &= \frac{P\{X_m = j\} P\{X_{m+1} = i \mid X_m = j\}}{P\{X_{m+1} = i\}} = \frac{\pi_j p_{j,i}}{\pi_i} \quad \text{ei riipu lainkaan muuttujien} \\
 & \quad \quad \quad X_{m+2} \dots X_{m+k} \text{ arvoista } i_2, \dots, i_k
 \end{aligned}$$

Käänteisen prosessin siirtymätodennäköisyydet

$$p_{i,j}^* = P\{X_m = j \mid X_{m+1} = i\} = \frac{\pi_j p_{j,i}}{\pi_i}$$

## Markovin prosessi käännettyssä ajassa (jatkoa)

Lause. Olkoon  $X_t$  (jatkuva-aikainen) Markov-prosessi, jonka tilasiirtymänopeudet ovat  $q_{i,j}$  ja tasapainotodennäköisyydet  $\pi_i$ . Tällöin käännetty prosessi  $X_t^*$  on Markov-prosessi ja sen tilasiirtymänopeudet ovat

$$q_{i,j}^* = \frac{\pi_j q_{j,i}}{\pi_i}$$

Todistus. Samankaltainen kuin edellä.

Huom. Nämä lauseet sanovat ainoastaan, että käännetty prosessi on markovinen, ei sitä että se olisi sama prosessi kuin alkuperäinen. Kääntyvyys on erillinen lisäominaisuus.

## Tasapainotodennäköisyyksien ratkaisu käännetyn prosessin avulla

Lause. Olkoon  $X_t$  Markov-prosessi, jonka tilasiirtymänopeudet ovat  $q_{i,j}$ . Jos löytyy luvut  $q_{i,j}^*$  ja luvut  $\pi_i$  siten, että

$$\sum_{j \neq i} q_{i,j} = \sum_{j \neq i} q_{i,j}^* \quad \forall i \quad \text{ja} \quad \pi_i q_{i,j}^* = \pi_j q_{j,i} \quad \forall i, j \quad \text{ja} \quad \sum_i \pi_i = 1$$

niin  $\pi_i$ :t ovat prosessien  $X_t$  ja  $X_t^*$  yhteiset tasapainotodennäköisyydet ja  $q_{i,j}^*$ :t prosessin  $X_t^*$  tilasiirtymänopeudet.

Todistus:

$$\sum_{j \neq i} \pi_j q_{j,i} = \sum_{j \neq i} \pi_i q_{i,j}^* = \pi_i \sum_{j \neq i} q_{i,j}^* = \pi_i \sum_{j \neq i} q_{i,j} = \sum_{j \neq i} \pi_i q_{i,j} \quad \forall i$$

Siten  $\pi_i$ :t toteuttavat  $X_t$ -prosessin globaalit tasapainoyhtälöt. Lisäksi on  $q_{i,j}^* = \pi_i q_{i,j} / \pi_i$  eli  $X_t^*$ :n siirtymänopeus.

- Lausetta voidaan (hiukan yllättäen) käyttää hyväksi sen todistamiseksi, että arvattu jakauma  $\pi_i$  todella on tasapainojakauma arvaamalla lisäksi käänteisen prosessin siirtymänopeudet  $q_{i,j}^*$ .
- On todella tapauksia (eräitä varsin mutkikkaita järjestelmiä), joissa  $\pi_i$ :t voidaan arvata ja käänteinen prosessi on melko ilmeinen ja joissa globaalien tasapainoehtojen toteutumisen suora tarkastus olisi työlästä.

## Kääntyvä Markov-prosessi

Käännetty Markov-prosessi  $X_t^*$  käyttäytyy alkuperäisen prosessin tavoin, jos sillä on samat tilasiirtymänopeudet. Kääntyvyyden ehto on siten

$$\boxed{q_{i,j}^* = q_{i,j}} \quad \forall i, j$$

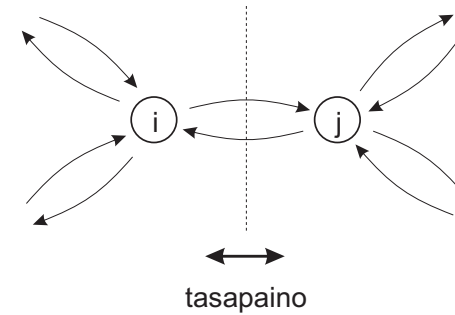
Aikaisemmin  $q_{i,j}^*$ :lle annetun lausekkeen perusteella ehto on ekvivalentti seuraavan ominaisuuden kanssa

$$\boxed{\pi_i q_{i,j} = \pi_j q_{j,i}} \quad \forall i, j \quad \begin{array}{l} \text{Detaljibalanssi} \\ \text{kääntyvyyden ehto} \end{array}$$

- Detaljibalanssi sanoo, että todennäköisyysvirrat minkä tahansa kahden tilan välillä ovat tasapainossa.
- Detaljibalanssista seuraa välittömästi globaalibalanssi eli että (kokonais)todennäköisyysvirta tilasta ulos,  $\sum_j \pi_i q_{i,j}$ , on yhtäsuuri kuin virta sisään,  $\sum_j \pi_j q_{j,i}$ .
- Tästä seuraa edelleen, että jos löytyy luvut  $\pi_i$  siten, että detaljibalanssiehdot ovat voimassa, niin  $\pi_i$ :t ovat systeemin tasapainotodennäköisyydet (normitettuna  $\sum_i \pi_i = 1$ ).
- Toisinpäin ei ole voimassa, että globaalitasapainosta seuraisi detaljibalanssi; kaikki Markov-prosessit eivät ole kääntyviä.

## Detaljibalanssi

$$\begin{cases} \pi_i q_{i,j} = \text{siirtymien } i \rightarrow j \text{ frekvenssi} \\ \pi_j q_{j,i} = \text{siirtymien } j \rightarrow i \text{ frekvenssi} \end{cases}$$



Detaljibalanssiehto sanoo, että prosessissa  $X_t$  tilojen  $i$  ja  $j$  välisiä siirtymiä tapahtuu samalla frekvenssillä kumpaankin suuntaan.

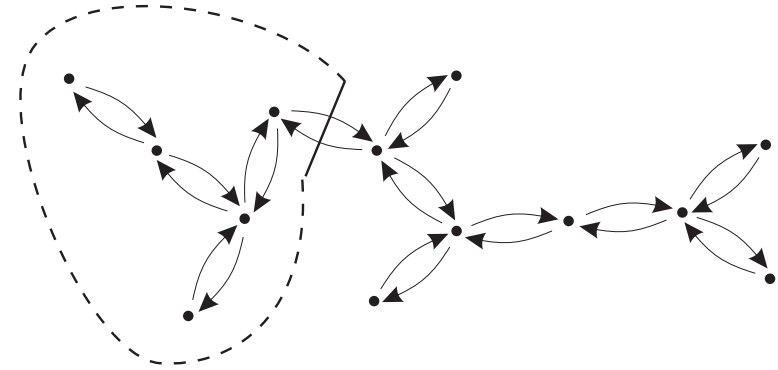
- Kääntyvässä prosessissa täytyy näin tietenkin ollakin, sillä käännettäessä ajan suunta siirtymästä  $i \rightarrow j$  tulee siirtymä  $j \rightarrow i$  ja päinvastoin. Jotta käännetty prosessi näyttäisi samalta kuin alkuperäinenkin, täytyy siirtymäfrekvenssien molempiin suuntiin olla samat.



## Puut ovat kääntyviä

Lause: Jos Markov-prosessin tilakaavio on puu, niin prosessi on ajassa kääntyvä.

Todistus. Suorittamalla leikkaus minkä tahansa kahden tilan väliltä puu jakaantuu kahteen osaan. Näihin osiin sovelletusta tilaryhmien välisestä (globaalista) tasapainoehdosta seuraa detaljibalanssi leikkauksessa.



Seuraus: Kaikki SK-tyyppiset Markov-prosessit ovat ajassa kääntyviä.

Esim.  $M/M/1$ ,  $M/M/n$ ,  $M/M/\infty$ ,  $M/M/m/m$ , ...

## Kolmogorovin kriteeri

Detaljibalanssin muodossa ilmoitettu kääntyvyysehto on sovellettavissa vain, kun tunnetaan sekä siirtymänopeudet  $q_{i,j}$  ja tasapainotodennäköisyydet  $\pi_i$ .

Jälkimmäiset voidaan aina ratkaista, kun  $q_{i,j}$ :t on annettu, ja niin ollen detaljibalanssin voimassaolon tarkistamiseen riittää tuntea siirtymänopeudet  $q_{i,j}$ .

Voidaan kysyä, onko mahdollista päätellä kääntyvyys (detaljibalanssi) suuremmin siirtymänopeuksista  $q_{i,j}$  ratkaisematta ensin tasapainotodennäköisyyksiä. Vastaus on myönteinen ja tarvittavan päättelyn kertoo seuraava:

### Kolmogorovin kriteeri

Olkoon  $i_1, i_2, \dots, i_m, i_1$  mikä tahansa suljettu sykli tilakaaviossa. Kolmogorovin kriteeri on täytetty, jos jokaiselle tällaiselle syklille pätee

$$q_{i_1, i_2} \cdot q_{i_2, i_3} \cdots q_{i_m, i_1} = q_{i_1, i_m} \cdot q_{i_m, i_{m-1}} \cdots q_{i_2, i_1}$$

ts. siirtymänopeuksien tulot syklin yli molempiin suuntiin laskettuina ovat samat.

Voidaan todistaa, että Kolmogorovin kriteeri on ekvivalentti detaljibalanssiehtojen kanssa ja niin ollen se antaa riittävän ja välttämättömän ehdon prosessin kääntyvyydelle.

Seuraus: Koska puumaisessa tilakaaviossa ei ole yhtään sykliä, Kolmogorovin kriteeri on aina täytetty ja seuraa uudelleen, että vastava Markovin prosessi on ajassa kääntyvä.

## Burken teoreema

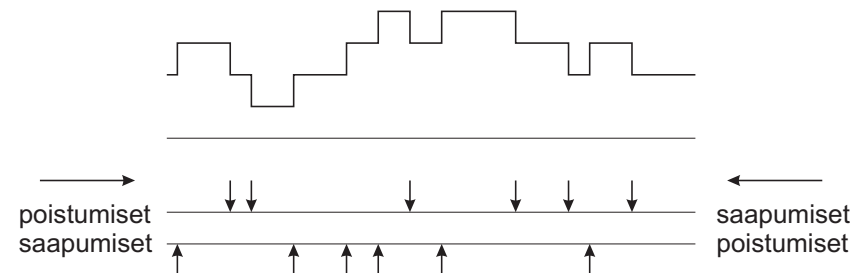
Burken teoreemana tunnettu lause sanoo:

$M/M/1$ -systeemissä, jossa poissonisen saapumisprosessin intensiteetti on  $\lambda$ ,

- asiakkaiden poistumishetket muodostavat Poisson-prosessin intensiteetillä  $\lambda$ ,
- kaikilla arvoilla  $t$  sisällä olevien asiakkaiden lukumäärä  $N_t$  on riippumaton ulostuloprosessista ennen hetkeä  $t$ .

Todistus.

- $M/M/1$ -jono on ajassa kääntyvä. Käännetty systeemi käyttäytyy täsmälleen kuten  $M/M/1$ -jono. Alkuperäisen jonon lähtöprosessi on sama kuin käännetyn systeemin tuloprosessi, joka ollen identtinen alkuperäisen systeemin tuloprosessin kanssa on Poisson-prosessi intensiteetillä  $\lambda$ .



- Alkuperäisen prosessin lähtöhetket ennen hetkeä  $t$  ovat käännetyn prosessin tulohetkiä ajan  $t$  jälkeen. Koska kyseiset tulohetket muodostavat Poisson-prosessin, on sen kehitys hetken  $t$  jälkeen riippumaton kaikessa menneestä, mm.  $N_t$ :n nykyisestä arvosta.

## Burken teoreema (jatkoa)

### Seuraus 1

Tarkkailemalla  $M/M/1$ -jonon lähtöhetkiä ei voida päätellä mitään siitä, montako asiakasta systeemissä tällä hetkellä on.

- Jos ulostulossa on havaittu ryöppy, niin jonossa todennäköisesti on ollut tavallista enemmän asiakkaita, mutta siitä, montako asiakasta siellä nyt vielä on, ei saada mitään tietoa.
- Ulostuloprosessia tarkkailemalla ei myöskään saada selville palveluaikaa  $1/\mu$ .

### Seuraus 2

Avoimessa jonoverkossa, joka lisäksi on asyklinen (ei takaisinkytkentäsilmukoita) kaikki jonot ovat riippumattomia  $M/M/1$ -jonoja.

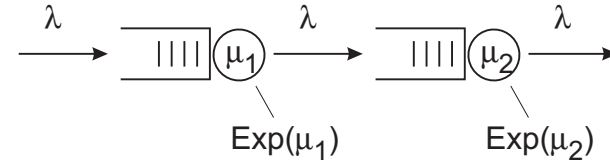
- Jonojen tulovirrat ovat todellisia Poisson-virtoja.
- Syöttävien jonojen nykytilat ovat riippumattomia aikaisemmista lähtöprosesseistaan, joista syötetyn jonon nykytila yksinomaan riippuu.

### Huomautus

Burken teoreema pätee myös  $M/M/m$ - ja  $M/M/\infty$ -systeemeille.

## Esimerkki: Tandem-jono

- Riippumattomat eksponentiaaliset palveluajat.
- Ensimmäinen jono on tavallinen  $M/M/1$ -jono.
- Burken teoreeman mukaan sen ulostuloprosessi on Poisson-prosessi.
- Siten myös jono 2 on  $M/M/1$ -jono.
- Jonon 2 tila  $N_2$  hetkellä  $t$  riippuu vain saapumisista ennen hetkeä  $t$ .
- Burken teoreeman mukaan ko. saapumisprosessi (= jonon 1 lähtöprosessi) ennen hetkeä  $t$  on riippumaton jonon 1 tilasta hetkellä  $t$ .



$\Rightarrow N_1$  ja  $N_2$  ovat riippumattomia

$$\begin{cases} P\{N_1 = i\} = (1 - \rho_1)\rho_1^i, & \rho_1 = \lambda/\mu_1 \\ P\{N_2 = j\} = (1 - \rho_2)\rho_2^j, & \rho_2 = \lambda/\mu_2 \end{cases}$$

$$P\{N_1 = i, N_2 = j\} = (1 - \rho_1)(1 - \rho_2)\rho_1^i\rho_2^j$$

## Kääntyvän prosessin katkaisu

Olkoon  $X_t$  kääntyvä Markov-prosessi, jonka tila-avaruus on  $\mathcal{S}$  ja jonka tasapainotodennäköisyydet ovat  $\pi_i$ . Kääntyvyys tarkoittaa sitä, että detaljibalanssiehdot ovat voimassa.

Olkoon  $\mathcal{S}'$  tila-avaruuden osajoukko. Tarkastellaan katkaistua prosessia  $X'_t$ , jolla

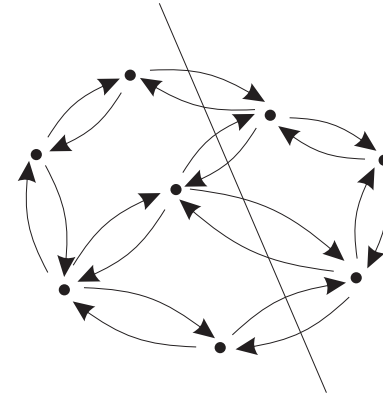
$$q'_{i,j} = \begin{cases} q_{i,j}, & i, j \in \mathcal{S}' \\ 0, & \text{muuten} \end{cases}$$

Oletetaan lisäksi, että  $X'_t$  on pelkistymätön. Tällöin prosessi  $X'_t$  on kääntyvä ja sen tasapainojakauma on

$$\boxed{\pi'_i = \frac{\pi_i}{\sum_{j \in \mathcal{S}'} \pi_j}} \quad \text{ts. } P\{X' = i\} = P\{X = i \mid X \in \mathcal{S}'\}$$

Todistus: Sijoitetaan  $\pi_i$  yritteenä prosessin  $X'_t$  globaaleihin tasapainoyhtälöihin. Nähdään heti, että ne toteutuvat kaikille tiloille  $i \in \mathcal{S}'$ , koska poistuneiden transitioiden nettovirta kuhunkin tilaan on nolla. Todennäköisyysjakauma saadaan (uudelleen)normittamalla jakauma kaikkien tilojen  $j \in \mathcal{S}'$  yli.

Huomautus. Katkaisuperiaate on käytännön sovelluksissa tärkeä.

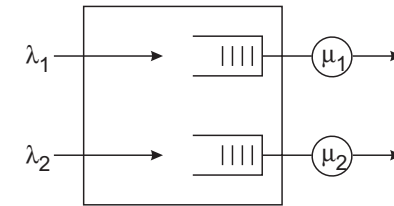


### Kääntyvän prosessin katkaisu (jatkoa)

Esim. 1. Aikaisemmin on useasti todettu, että SK-prosessin (kääntyvä!) tila-avaruuden tekeminen äärelliseksi aiheuttaa ainoastaan jakauman katkaisun ja uudelleennormituksen:

$M/M/1$ – jono,	$\underbrace{M/M/m/m}$ ,	$\underbrace{M/M/m/m/n}$
	Erlang, katkaistu	Engset, katkaistu
	Poisson-jakauma	binomijakauma

Esim. 2. Kaksi  $M/M/1$ -jonoa, joilla yhteinen puskuritila

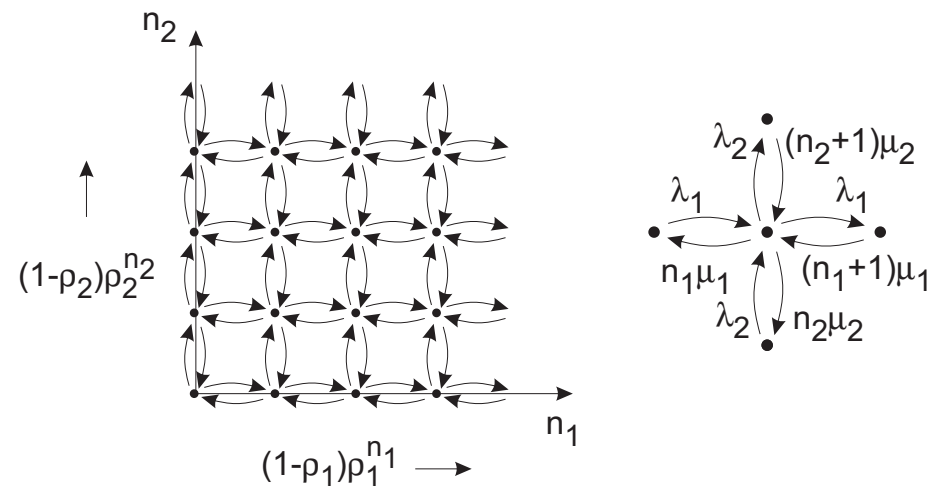


Oletetaan ensin, että muistitila on ääretön. Tällöin jonot ovat täysin riippumattomia.

$$\begin{cases} P\{N_1 = i\} = (1 - \rho_1)\rho_1^i \\ P\{N_2 = j\} = (1 - \rho_2)\rho_2^j \end{cases}$$

$$P\{N_1 = i, N_2 = j\} = (1 - \rho_1)\rho_1^i(1 - \rho_2)\rho_2^j$$

Prosessit  $N_1$  ja  $N_2$  erikseen ovat kääntyviä. On helppo osoittaa, että myös yhteisprosessi  $(N_1, N_2)$  on kääntyvä (harjoitustehtävä) eli että ylläoleva yhteisjakauma toteuttaa detaljibalanssiehdot.



## Kääntyvän prosessin katkaisu (jatkoa)

Esim. 2. jatkuu...

Äärettömän kapasiteetin systeemissä tilatodennäköisyydet ovat tulomuotoiset (jonojen 1 ja 2 reunajakaumien tulo)

Kun muistitilalla on äärellinen kapasiteetti  $C$ , tapahtuu kuvan mukainen tila-avaruuden katkaisu.

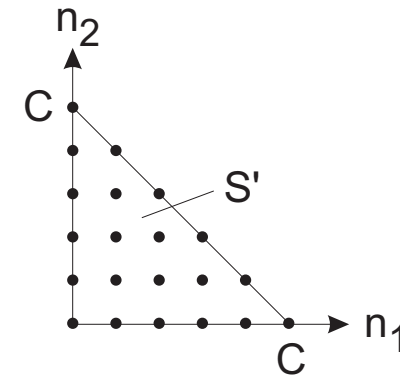
Katkaistussa tila-avaruudessa  $\mathcal{S}'$  tilatodennäköisyydet ovat samaa muotoa kuin ennenkin.

$$P\{N_1 = i, N_2 = j\} = \begin{cases} a \cdot \rho_1^i \cdot \rho_2^j, & i + j \leq C \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

missä  $a$  on normitusvakio

$$a = \frac{1}{\sum_{\substack{i \\ i+j \leq C}} \sum_{\substack{j \\ i+j \leq C}} \rho_1^i \cdot \rho_2^j}$$

Huom. Vaikka ratkaisu on tulomuotoinen alueessa  $\mathcal{S}'$ , se ei ole sitä kaikilla arvoilla  $i, j = 0, 1, 2, \dots$ . Jonot eivät ole riippumattomia vaan riippuvat rajoitusehdon kautta.





## käännetyn prosessin käyttö jono-ongelmien ratkaisussa

Esim. Tehty työ  $M/M/1$ -jonossa

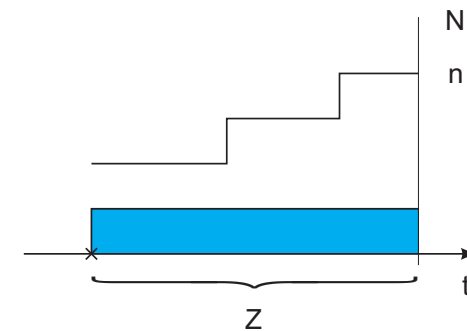
$M/M/1$ -jonossa palveltavana olevan asiakkaan tekemätön työ on eksponenttijakauman muistittomuudesta johtuen  $\text{Exp}(\mu)$ -jakautunut ja riippumaton jononpituudesta.

Asiakkaan jo saama palvelu eli tehty työ  $Z$  sen sijaan korreloi jononpituuden kanssa: jos palvelu on kestänyt kauan, on todennäköistä, että jonoa on kertynyt paljon.

Ajankäätötarkastelulla voidaan kätevästi johtaa  $Z$ :n jakauma ehdolla, että jononpituus on  $N = n$ .

Viereinen kuva esittää tyypillistä jononpituuden kehittymistä

- Siitä hetkestä alkaen, kun nyt (hetkellä 0) palveltavana oleva asiakas pääsi palveluun,  $N_t$  on kasvava (ei-vähenevä) ajan funktio; koska palvelu jatkuu, systeemistä ei tapahdu poistumisia.



Esim. Tehty työ  $M/M/1$ -jonossa (jatkoa)

Saapumishetken suhteen on kaksi mahdollisuutta:

a) Asiakas tuli tyhjään systeemiin.

Käänteisessä ajassa hetki  $Z$  on hetki, jolloin sisällä olevat  $n$  asiakasta ovat poistuneet

$$Z \sim X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$X_i \sim \text{Exp}(\mu), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow Z \sim \text{Erlang}(n, \mu)$$

b) Asiakas tuli jonoon: palvelun alkuhetki  $-Z$  on edellisen asiakkaan poistumishetki.

Käänteisessä ajassa hetki  $Z$  on ensimmäisen asiakkaan saapumishetki

$$Z \sim \text{Exp}(\lambda)$$

Käänteisessä ajassa tarkasteltuna alkutilasta  $N = n$  lähtien systeemistä tapahtuu poistumisia  $\text{Exp}(\mu)$ -väliajoin ja saapumisia  $\text{Exp}(\lambda)$ -väliajoin. Systeemi joko tyhjenee ensin kokonaan tai tulee uusi saapuminen. Se, joka tapahtuu ensin, määrää ajan  $Z$ :

$$Z \sim \min(X, Y), \quad X \sim \text{Erlang}(n, \mu) \quad Y \sim \text{Exp}(\lambda); \quad X \text{ ja } Y \text{ riippumattomia}$$

