1. Jonoteorian peruskäsitteitä: Littlen kaava (Demo)

   Tarkastellaan järjestelmää mustana laatikkona. Tiedetään, että järjestelmään saapuu asiakkaita keskimäärin nopeudella λ. Aika, jonka asiakas keskimäärin viettää järjestelmässä olkoon $\bar{T}$ ja järjestelmässä keskimäärin sisällä olevien asiakkaiden lukumäärä olkoon $\bar{N}$. Littlen tuloksen mukaan pätee

   $$\bar{N} = \lambda \bar{T}.$$

   Todista tulos seuraavan tarkastelun avulla:

   Oletetaan, että jokaiselta asiakkaalta i peritään maksu M_i, jonka suuruus on verrannollinen asiakkaan järjestelmässä viettämään aikaan, $M_i \propto T_i$ mk/min. Mikä on järjestelmän keskimääräinen ansionopeus (aikavälin aikana saadut ansiot/aikavälin pituus)? Mikä on ansionopeuden tulkinta, kun jokaiselta asiakkaalta i peritään maksu $M_i = T_i$?

   Asiakkaita saapuu intensiteetillä

   $$\lambda = \frac{\text{asiakkaiden lukumäärä aikavälillä } T}{\text{aikaväli } T}.$$

   Systeemin hetkellinen tulovirta I on taas puolestaan

   $$I = \frac{\text{ansioiden määrä aikavälillä } T}{\text{aikaväli } T}.$$

   Ansioiden määrä aikavälillä T on sama kuin asiakkaiden systeemissä viettämä aika aikavälillä T.

   Saadaan siis

   $$\begin{aligned} I &= \frac{\text{ansioiden määrä aikavälillä } T}{\text{aikaväli } T} \\ &= \frac{\text{asiakkaiden lukumäärä aikavälillä } T}{\text{aikaväli } T} \frac{\text{asiakkailta veloitettu hinta aikavälillä } T}{\text{asiakkaiden lukumäärä aikavälillä } T} \\ &= \lambda \bar{T} \\ \bar{N} &= I = \lambda \bar{T} \end{aligned}$$

2. Mitoituksen peruskäsitteitä: (Demo)

   Menetysjärjestelmässä on kolme palvelinta. Asiakkaiden saapumisnopeus on $\lambda = 1/\text{s}$ ja keskimääräinen palveluaika 2s.

   a) Laske järjestelmän aikaesto.

      Liikenneintensiteetti on $a = 1/\text{s} \cdot 2\text{s} = 2$

Aikaesto on $E(n,a) = E(3,2) = \frac{\frac{2^3}{3!}}{\sum_{i=0}^{3} \frac{2^i}{i!}} = 4/19$, ja Poisson saapumisista (eksp. jakautuneet saapumisväliajat) johtuen kutsuesto on sama.

b) Kuinka monta asiakasta keskimäärin estyy tunnissa?

Kutsuja on tunnissa $1/\text{s} \cdot 3600\text{s} = 3600$.

Asiakkaita saapuu tunnin aikana 3600, joista 4/19 estyy.

Estyneitä asiakkaita on tunnissa $4/19 \cdot 3600 = 758$.

c) Mitkä ovat tarjotun, kuljetetun ja estyneen liikenteen liikenneintensiteetit?

Tarjottu liikenneintensiteetti on $a = 2$

Estynyt liikenneintensiteetti on $aE(n,a) = 2 \cdot 4/19 = 8/19$

Kuljetettu liikenneintensiteetti

$=$ tarjottu $-$ estynyt liikenneintensiteetti $= a(1 - E(n,a)) = 2 \cdot 15/19 = 30/19$

3. Tutkitaan lähiverkkojen (LAN) moniliityntämenetelmä ALOHA:n maksimiläpäisyä.

Tietokoneet (asemat), jotka ovat kytkettyinä LANiin lähettävät paketteja toisilleen. Asemat kilpailevat tästä jaetusta resurssista aina yrittäessään lähettää paketteja. Kerralla resurssi voi olla vain yhden aseman käytössä. Dynaaminen resurssinjako tapahtuu yleensä hajautetusti kilpavarausperiatteella. Tutkitaan tässä tehtävässä satunnaisliityntä (random access) ALOHA menetelmää. Muita liityntämenetelmiä ovat mm. CSMA/CD, Token Bus ja Token Ring. Lisätietoja esim. Aapisesta kappale 8 Tietoverkot.

Tutkitaan tilannetta, jossa asemat lähettävät paketteja toisistaan riippumatta ja törmäyksiä ei pyritä estämään. Oletetaan, että asemat generoivat kiinteänpituisia paketteja (paketin lähetykseen kuluva aika on T) Poisson prosessin mukaan intensiteetillä ν. Stabilisuusvaatimus on $\nu < 1/T$. Paketit törmäävät toisiinsa, mikäli niiden lähtöhetkien väli $< T$. Jos paketit törmäävät lähetetään ne satunnaisen ajan kuluttua uudestaan, kunnes lähetys lopulta onnistuu. Approksimoidaan silti pakettien kokonaisvirtaa edelleen Poisson-prosessilla, mutta intensiteetillä $\lambda > \nu$. Mikä on ALOHA:n maksimiläpäisy?

Asema lähettää paketin hetkellä 0. Törmäystä ei tapahdu, mikäli aikavälillä $[-T, T]$ ei yritetä lähettää muita paketteja. Onnistuneen lähetyksen todennäköisyys on $P(\text{yksi lähetys aikavälillä } 2T) = e^{-2\lambda T}$.

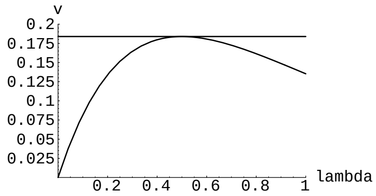
Läpäisy on tällöin

$$v = \lambda e^{-2\lambda T}$$

Arvo $\lambda_{max} = \frac{1}{2T}$ maksikoi v:n. Liikennekuorma on $\lambda_{max} T = 1/2$ ja v_{max}:n arvo

$$v_{max} = \lambda_{max} e^{-2\lambda_{max} T} = \frac{1}{2eT} = 0.184(1/T)$$

Maksimi läpäisy on (vain) 20 % lähetysnopeudesta $(1/T)$.



Huom! Kotitehtävien vastaukset on tarkoituksella jätetty suppeiksi ja keskeneräisiksi.

4. Jonosysteemin tunnuslukuja (kotilasku 2p.)

   $M/M/1$ jonoa käytetään kuvaamaan tilannetta jossa asiaakkaat saapuvat yhden palvelimen systeemin exponentiaalisesti jakautunein väliajoin (parametri λ), heidän palvelunsa kesto on eksponentiaallisesti jakautunut (parametri μ) ja jonotuspaikkoja on ääretön määrä. Kuvataan systeemissä olevien asiakkaiden lukumäärää satunnaismuutujalla X. Voidaan osoittaa, että tämän systeemin tilatodennäköisyydet tasapainossa (missä $\pi_i = P(X = i)$ on tilan i todennäköisyys) ovat geometrisestä jaukaumasta.

$$\pi_i = \pi_0 \Big(\frac{\lambda}{\mu}\Big)^i = (1-\rho)\rho^i$$

   a) Laske $M/M/1$ jonossa olevien asiakkaiden lukumäärän odotusarvo.

   Tasapainotodennäköisyydet ovat tila(asiakkaiden lukumäärä)todennäköisyyksiä. Odotusarvo on

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=0}^{\infty} i\pi_i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} i(1-\rho)\rho^i \\ &= (1-\rho)\sum_{i=0}^{\infty} i\rho^i \end{aligned}$$

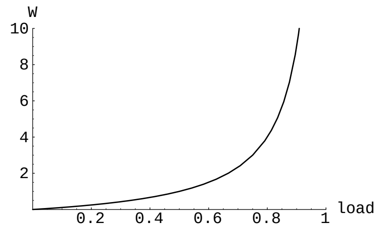
$$\begin{aligned} &= (1-\rho)\rho \sum_{i=0}^{\infty} i\rho^{i-1} \\ &= \ldots \end{aligned}$$

b) Laske asiakkaan systeemissä keskimäärin viettämä aika käyttäen Littlen kaavaa.

$$\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\lambda}$$

c) Mikä on asiakkaan keskimääräinen odotusaika (aika jonka viettää jonossa ennen palvelua)? Piirrä kuva, jossa näkyy miten keskimääräinen odotusaika riippuu saapumisintensiteetistä λ, kun oletetaan että $\mu = 1$.

Odotusaika on systeemissäoloaika vähennettynä palveluaika. Palveluajan odotusarvo on $1/\mu$.



5. Mitoitusta (kotilasku 2p.)

Postimyyntiyhtiössä on tilaussoittoja vastaanottamassa 3 henkilöä. Puheluita saapuu Poisson-prosessina nopeudella 1/min ja puheluiden keskipituus on 2 min.

a) Millä todennäköisyydellä saapuva puhelu estyy, kun estyneitä puheluyrityksiä ei uusita?

Tilausten liikenneintensiteetti on $a = 1/\text{min} \cdot 2 \text{ min} = 2$

Estotodennäköisyys saadaan jälleen Erlangin kaavaa käyttäen

$$E(3, 2) = 4/19.$$

b) Kannattaako neljännen vastaajan palkkaaminen, jos vastaajan kokonaiskustannukset ovat 100 mk/h ja tuotto tilausta kohti on keskimäärin 20 mk?

Jos kasvatetaan johtojen määrrää on estotodennäköisyys

$$E(4, 2) = 2/21.$$

Enää tarvitsee laskea kuinka paljon estyneiden puheluiden määrä pieneni ja mikä on rahallinen hyöty.

6. Liikenneprosessin havainnollistamista (kotilasku 2p.)

Tarkastellaan puhelinliikennettä yksittäisessä keskusten välisessä yhdysjohdossa aikavä-lillä $[0, T]$, missä $T = 16$ (aikayksikköä). Tänä aikana systeemiin saapuu 7 uutta kutsua ajanhetkinä

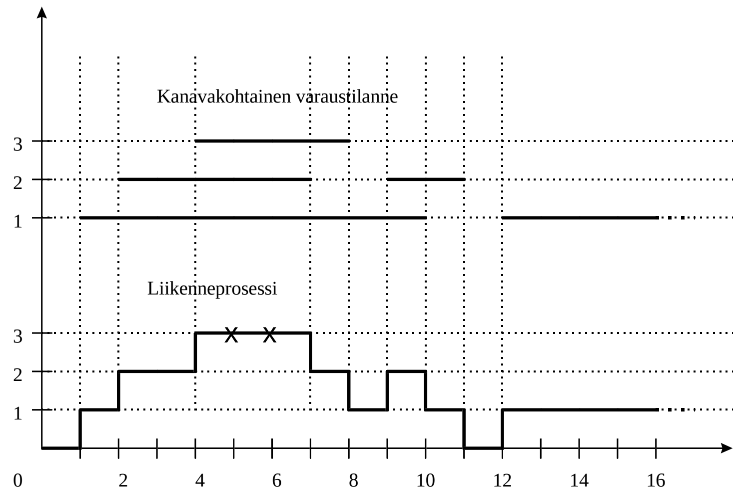
- 1, 2, 4, 5, 6, 9 ja 12 (aikayksikköä).

Näiden kutsujen pitoajat [siinä tapauksessa että ne eivät esty] ovat (samassa järjetyksessä kuin edellä)

- 9, 5, 4, 1, 7, 2 ja 6 (aikayksikköä).

Linkin kapasiteetti on $n = 3$ kanavaa. Oletetaan, että hetkellä $t = 0$ systeemi on tyhjä eli kaikki kolme kanavaa ovat vapaina. Piirrä kuva, mistä selviävät kutsujen saapumishetket, kanavakohtainen varaustilanne sekä varattujen kanavien lkm eli liikenneprosessi ajan t funktiona, $t \in [0, T]$. Jos kutsu ei esty, voit varata sille mieleisesi vapaan kanavan. Montako tarjotuista kutsuista estyy? Millä todennäköisyydellä kutsu estyy? Entä millä todenäköisyydellä systeemi on estotilassa? Mikä on estotodennäköisyys? Mikä on liikennemäärä ajalla $[0, T]$?

Allaolevassa kuvassa on esitetty liikenneprosessi sekä kanavakohtaiset varaustilanteet.



Kysytyt suureet voi sitten laskea kuvasta.

Esim. aikaesto on todennäköisyys sille, että systeemi on estotilassa. Jos systeemi on estotilassa x aikayksikköä, on kuvan perusteella estotodennäköisyys $x/16$. Kutsuesto on taas todennäköisyys sille, että saapuva kutsu estyy. Jos kutsuja saapuu y kpl ja niistä z estyy, todennäköisyys on z/y. Arvot (x, y, z) saadaan kuvasta.