TEKNILLINEN KORKEAKOULU **Demonstraatiot**
Tietoliikenne- ja tietoverkkotekniikan laitos **Luento 12**
S-38.1145 Liikenneteorian perusteet, Kevät 2008 29.2.2008

D12/1 Tarkastellaan verkkoa, jossa on 4 solmua ja 10 linkkiä. Merkitään $\mathcal{N}$:llä solmujen joukkoa, $\mathcal{N} = \{a, b, c, d\}$, ja $\mathcal{J}$:llä linkkien joukkoa, $\mathcal{J} = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Linkkien ominaisuudet käyvät ilmi alla olevasta taulukosta (j = linkin indeksi, n_j = lähdesolmu, m_j = määränpääsolmu, c_j = kapasiteetti).

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_j	a	b	a	c	a	d	b	c	c	d
m_j	b	a	c	a	d	a	c	b	d	c
c_j	10	10	10	10	10	10	4	4	4	4

(a) Piirrä verkon topologia.

(b) Montako OD-paria verkossa on?

(c) Montako polkua verkossa on?

(d) Montako lyhintä polkua verkossa on, kun linkeille valitaan yksikköpainot ($w_j = 1$ kaikilla j)?

D12/2 Jatketaan edellisen tehtävän verkon tarkastelua. Verkkoa kuormittaa alla olevan liikennematriisin $\mathbf{T}$ mukainen liikenne,

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Kuormantasausongelmassa minimoidaan suhteellisten linkkikuormien maksimi. Esitä tämän ongelman ratkaisu perusteluineen.

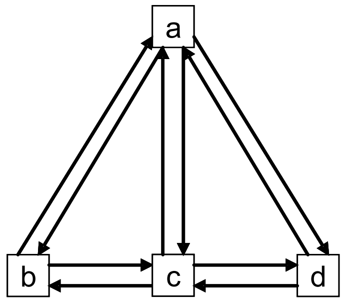
(b) Laske tämän optimaalisen reitityksen aiheuttamat suhteelliset linkkikuormat.

D12/3 Jatketaan vielä edellisten tehtävien verkon ja liikenteen tarkastelua. Oletetaan nyt, että reititykseen käytetään lyhimmän polun algoritmia yksikköpainoilla ($w_j = 1$ kaikilla j) yhdistettynä ECMP-periaatteeseen.

(a) Laske tämän lyhimmän polun reitityksen aiheuttamat suhteelliset linkkikuormat.

(b) Esitä tätä parempi reititys, joka on saatu linkkipainoja muuttamalla.

D12/1 (a) Verkon topologia on esitetty kuvassa 1.



Kuva 1: [D12/1] Verkon topologia.

(b) Verkon jokaisesta solmusta pääsee jokaiseen solmuun, joten OD-pareja on $4 \cdot 3 = 12$ kappaletta.

(c,d) Alla olevaan taulukkoon on listattu kaikki OD-parit sekä niitä vastaavat polut ja lyhimmät polut (olettaen yksikköpainot kaikilla linkeillä, eli lasketaan hyppyjen lukumäärä lähteestä määränpäähän). Polkuja on yhteensä 38 ja lyhimpiä polkuja 14. Esimerkiksi OD-parin (b,d) lyhimmät polut ovat b $\to$ a $\to$ d ja b $\to$ c $\to$ d, joitten kummankin pituus on kaksi hyppäystä.

k	OD-pari	polkujen lkm	lyh. polkujen lkm
1	(a,b)	3	1
2	(a,c)	3	1
3	(a,d)	3	1
4	(b,a)	3	1
5	(b,c)	3	1
6	(b,d)	4	2
7	(c,a)	3	1
8	(c,b)	3	1
9	(c,d)	3	1
10	(d,a)	3	1
11	(d,b)	4	2
12	(d,c)	3	1
	yhteensä	38	14

D12/2 (a) Tavoite: suhteellisten linkkikuormien maksimin minimointi, kts. L12/23 ja L12/25. Lähdetään liikkeelle lyhimmän polun reitityksen mukaisesta kuorman jaosta. Solmusta a lähtevä ja sinne tuleva liikenne reititetään vastaaville yhden hypyn reiteille, siis vastaaville linkeille. Symmetrian vuoksi kunkin solmusta a lähtevän ja sinne tulevan linkin j suhteelliseksi kuormaksi tulee

$$\rho_j = \frac{y_j}{c_j} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0.50$$

Seuraavaksi tarkastellaan solmusta b solmuun c kulkevaa liikennettä. Lyhimmän polun mukainen reitti on vastaava linkki. Ko. linkin suhteelliseksi kuormaksi tulee

$$\rho_{\mathrm{bc}} = \frac{y_{\mathrm{bc}}}{c_{\mathrm{bc}}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.50$$

Symmetrian nojalla todetaan, että vastaava tarkastelu johtaa suhteellisiin linkkikuormiin

$$\rho_{\mathrm{bc}} = \rho_{\mathrm{cb}} = \rho_{\mathrm{cd}} = \rho_{\mathrm{dc}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.50$$

Huomaa, että nämä eivät ole lopullisia linkkikuormia, vaan jäljellä on vielä solmujen b ja d välisen liikenteen reititys. Tarkastellaan ensin OD-parin (b,d) liikenteen reitittämistä. Lyhympiä polkuja on nyt kaksi: b $\to$ a $\to$ d ja b $\to$ c $\to$ d. Merkitään ϕ:llä sitä osuutta ko. liikenteestä, joka ohjataan reitille b $\to$ a $\to$ d. Vastaavasti osuus $1-\phi$ ohjataan toiselle reitille b $\to$ c $\to$ d. Parametrin ϕ funktiona linkkien (b,a) ja (b,c) kokonaiskuormat ovat

$$\rho_{\mathrm{ba}} = \frac{y_{\mathrm{ba}}}{c_{\mathrm{ba}}} = \frac{5+\phi\cdot 2}{10}, \quad \rho_{\mathrm{bc}} = \frac{y_{\mathrm{bc}}}{c_{\mathrm{ba}}} = \frac{2+(1-\phi)\cdot 2}{4} = \frac{2-\phi}{2}$$

Näitten suhteellisten linkkikuormien maksimi minimoituu, kun ne asetetaan yhtä suuriksi:

$$\rho^*_{\mathrm{ba}} = \rho^*_{\mathrm{bc}} \;\Leftrightarrow\; \frac{5+\phi^*\cdot 2}{10} = \frac{2-\phi^*}{2} \;\Leftrightarrow\; \phi^* = \frac{5}{7} = 0.714$$

Optimireitityksessä siis OD-parin (b,d) liikenteestä osuus $\phi^* = 5/7 = 0.714$ ohjataan reitille b $\to$ a $\to$ d ja osuus $1-\phi^* = 2/7 = 0.286$ reitille b $\to$ c $\to$ d. Symmetrian nojalla voidaan päätellä, että vastaavasti OD-parin (d,b) liikenteestä osuus $\phi^* = 5/7 = 0.714$ ohjataan reitille d $\to$ a $\to$ b ja osuus $1-\phi^* = 2/7 = 0.286$ reitille d $\to$ c $\to$ b. Muitten OD-parien liikenne ohjataan kokonaisuudessaan vastaavalle yksikäsitteiselle lyhimmälle polulle.

(b) Kohdassa (a) johdetulla optimaalisella kuormanjaolla linkkien (b,a) ja (b,c) suhteellisiksi linkkikuormiksi tulee

$$\rho^*_{\mathrm{ba}} = \rho^*_{\mathrm{bc}} = \frac{5+\frac{5}{7}\cdot 2}{10} = \frac{45}{70} = \frac{9}{14} = 0.64$$

Symmetrian nojalla päättelemme lisäksi, että

$$\rho^*_{\mathrm{ba}} = \rho^*_{\mathrm{bc}} = \rho^*_{\mathrm{ad}} = \rho^*_{\mathrm{cd}} = \rho^*_{\mathrm{da}} = \rho^*_{\mathrm{dc}} = \rho^*_{\mathrm{ab}} = \rho^*_{\mathrm{cb}} = \frac{9}{14} = 0.64$$

Todetaan vielä, että (a)-kohdan alun perusteella

$$\rho^*_{\mathrm{ac}} = \rho^*_{\mathrm{ca}} = \frac{5}{10} = 0.50$$

Nämä ovat optimaaliset suhteelliset linkkikuormat ρ^*_j. Suurin niistä on $9/14 = 0.64$. Kaikki muut reititykset tuottavat siis vähintään tämän suuruisen maksimaalisen suhteellisen linkkikuorman. Optimireititykseen perustuvat suhteelliset linkkikuormat on myös esitetty kuvassa 2 (vasen laita).

Huom. Täsmälleen samaan tulokseen johtaisi vain reititys, jossa OD-parin (b,d) liikenne jaettaisiin suhteessa ϕ^* ja $1-\phi^*$ reiteille b $\to$ c $\to$ a $\to$ d ja b $\to$ a $\to$

c $\rightarrow$ d, mutta tämä reititys johtaisi pidempien reittien vuoksi suurempaan kokonaisliikenteeseen. Alkuperäinen ratkaisu siis optimoi molemmat luennoilla esitetyt kuormantasausongelmat L12/23 ja L12/25, kun taas jälkimmäinen ratkaisu optimoi vain ongelman L12/23.

D12/3 (a) Oletetaan nyt, että reititykseen käytetään lyhimmän polun algoritmia yksikköpainoilla ($w_j = 1$ kaikilla j) yhdistettynä ECMP-periaatteeseen (L12/18). Tehtävän D12/1 (d)-kohdassa käytiin läpi näitä painoja vastaavat eri OD-parien lyhimmät polut. Vain OD-pareilla (b,d) ja (d,b) on useampi kuin yksi lyhin polku. Muitten OD-parien liikenne ohjataan kokonaisuudessaan vastaavalle yhden hypyn reitille, joten kaikille linkeille j tulee tämän seurauksena suhteelliset kuormat (vrt. tehtävän D12/2 (a)-kohdan alku)

$$\rho_j = \frac{1}{2} = 0.50$$

Tarkastellaan sitten OD-parin (b,d) liikennettä. Merkitään ϕ°:llä sitä osuutta ko. liikenteestä, joka ohjataan reitille b $\rightarrow$ a $\rightarrow$ d. Vastaavasti osuus $1 - \phi^\circ$ ohjataan toiselle lyhimmän polun reitille b $\rightarrow$ c $\rightarrow$ d. ECMP-periaatteen mukaisesti OD-parin (b,d) liikenne jaetaan jokaisessa reitillä vastaan tulevassa reitittimessä tasan ko. reitittimestä määränpääsolmuun menevien reitittimien kesken. Tästä seuraa, että

$$\phi^\circ = \frac{1}{2} = 0.50$$

Tämä kasvattaa ko. reittien linkkien suhteellisia linkkikuormia seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\rho^\circ_{\mathrm{ba}} = \rho^\circ_{\mathrm{ad}} &= \frac{5 + \phi^\circ \cdot 2}{10} = \frac{5 + \frac{1}{2} \cdot 2}{10} = \frac{3}{5} = 0.60, \\
\rho^\circ_{\mathrm{bc}} = \rho^\circ_{\mathrm{cd}} &= \frac{2 + (1 - \phi^\circ) \cdot 2}{4} = \frac{2 + \frac{1}{2} \cdot 2}{4} = \frac{3}{4} = 0.75
\end{aligned}$$

Symmetrian nojalla

$$\rho^\circ_{\mathrm{da}} = \rho^\circ_{\mathrm{ab}} = \frac{3}{5} = 0.60, \quad \rho^\circ_{\mathrm{dc}} = \rho^\circ_{\mathrm{cb}} = \frac{3}{4} = 0.75$$

Kahden muun linkin kuormat säilyvät ennallaan, joten

$$\rho^\circ_{\mathrm{ac}} = \rho^\circ_{\mathrm{ca}} = \frac{1}{2} = 0.50$$

Nämä ovat (lopulliset) lyhimmän polun reitityksen suhteelliset linkkikuormat ρ°_j (linkkipainoin $w_j = 1$). Suurin niistä on $3/4 = 0.75$ (kun taas optimireityksellä päästiin selvästi parempaan tulokseen $9/14 = 0.64$). Yksikköpainoihin perustuvat suhteelliset linkkikuormat on myös esitetty kuvassa 2 (keskellä).

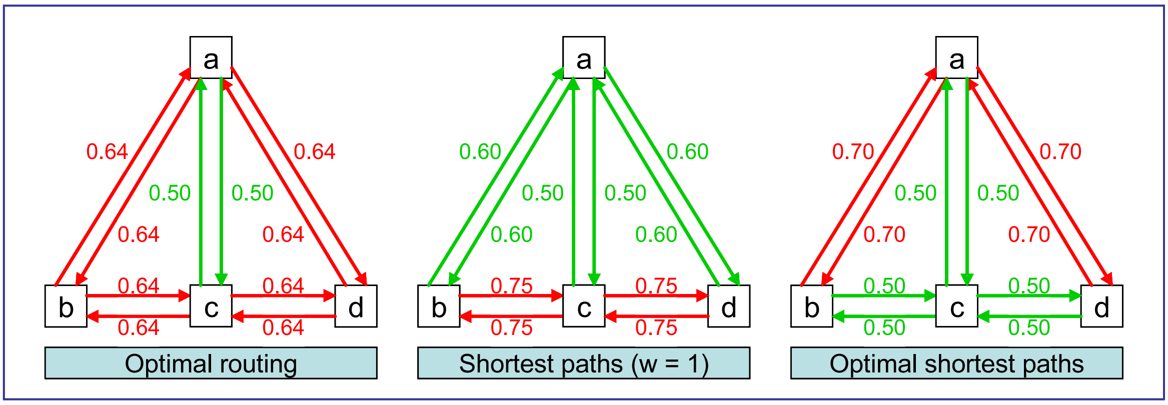
(b) Linkkipainoja w_j muuttamalla voidaan koettaa pienentää pullonkaulalinkkien (b,c), (c,d), (d,c) ja (c,b) suhteellista kuormaa $3/4 = 0.75$. Valinnoilla

$$\begin{aligned}
&\tilde{w}_{\mathrm{ab}} = \tilde{w}_{\mathrm{ba}} = \tilde{w}_{\mathrm{ac}} = \tilde{w}_{\mathrm{ca}} = \tilde{w}_{\mathrm{ad}} = \tilde{w}_{\mathrm{da}} = 2 \\
&\tilde{w}_{\mathrm{bc}} = \tilde{w}_{\mathrm{cb}} = \tilde{w}_{\mathrm{cd}} = \tilde{w}_{\mathrm{dc}} = 3
\end{aligned}$$

muut paitsi OD-parien (b,d) ja (d,b) lyhimmät polut säilyvät ennallaan. OD-parin (b,d) ainoaksi lyhimmäksi poluksi jää reitti b → a → d, ja vastaavasti OD-parille (d,b) käänteinen reitti d → a → b. Näitä linkkipainoja vastaaviksi suhteellisiksi linkkikuormiksi saadaan siis:

$$\tilde{\rho}_{\mathrm{ba}} = \tilde{\rho}_{\mathrm{ad}} = \tilde{\rho}_{\mathrm{da}} = \tilde{\rho}_{\mathrm{ab}} = \frac{5+2}{10} = \frac{7}{10} = 0.70$$
$$\tilde{\rho}_{\mathrm{ac}} = \tilde{\rho}_{\mathrm{ca}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0.50$$
$$\tilde{\rho}_{\mathrm{bc}} = \tilde{\rho}_{\mathrm{cd}} = \tilde{\rho}_{\mathrm{dc}} = \tilde{\rho}_{\mathrm{cb}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.50$$

Suurin näistä muunneltuihin linkkipainoihin $\tilde{w}_j$ perustuvista suhteellisista linkkikuormista on $7/10 = 0.70$, mikä on pienempi kuin yksikköpainoihin perustuvan reitityksen lopputulos $3/4 = 0.75$. Tehtävässä siis onnistuttiin, vaikka vieläkin jäi varaa parantaa optimitulokseen $9/14 = 0.64$ nähden. Pelkästään linkkipainoja muuttamalla ei kuitenkaan tämän parempaan tulokseen päästä (ECMP-periaatteen rajoituksista johtuen). Muunneltuihin linkkipainoihin perustuvat suhteelliset linkkikuormat on myös esitetty kuvassa 2 (oikea laita).



Kuva 2: [D12/2,D12/3] Eri reitityksiin liittyvät suhteelliset linkkikuormat. Vasemmalla optimireititys. Keskellä yksikköpainoihin perustuvat lyhimmät polut. Oikealla muunneltuihin linkkipainoihin perustuvat lyhimmät polut.