D11/1 Generoi neljä (pseudo)satunnaislukua jakaumasta $\mathrm{U}(0,1)$ käyttäen luennoilla esitettyä MCG-algoritmia parametrein $m = 2^{31} - 1$, $a = 16\,807$ ja $Z_0 = 920\,107$.

D11/2 Generoi (edellistä tehtävää hyödyntäen) neljä satunnaislukua jakaumista

(a) $\mathrm{U}(1,2)$,

(b) $\mathrm{Geom}(1/2)$ ja

(c) $\mathrm{Exp}(2)$.

D11/3 Oletetaan, että simuloinnilla on saatu seuraavanlaiset riippumattomat havainnot X_i parametrista α: 2.47, 5.32, 3.63, 4.16, 2.40 ja 6.07. Laske 95%:n luottamusväli parametrille α olettaen, että yksittäisen havainnon varianssi tunnetaan, $D^2[X_i] = 2$.

D11/4 Simuloi tapahtumapohjaisesti M/M/1-FIFO-jonon (parametrein $\lambda = 1/2$ ja $\mu = 1$) jononpituuden $Q(t)$ kehitystä hetkestä 0 hetkeen $T = 2000$ olettaen, että systeemi on alussa tyhjä, $Q(0) = 0$. Jononpituuteen $Q(t)$ lasketaan kaikki hetkellä t systeemissä olevat asiakkaat, sekä odottavat että palvelussa oleva. Tee $n = 100$ riippumatonta simulointiajoa (ts. käytä satunnaislukujen generoinnissa eri siemenlukua eri simulointiajoissa). Laske kussakin simulointiajossa keskimääräinen jononpituus X aikavälillä $[T_0, T]$, missä $T_0 = 1000$, kaavasta

$$X = \frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^{T} Q(t)dt.$$

Näin saat n havaintoa $X_1, X_2, \ldots, X_n$ kyseisestä suureesta.

(a) Tulosta näistä havainnoista lasketut keskiarvot $\bar{X}_m$, $m = 10, 20, \ldots, 100$,

$$\bar{X}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i.$$

(b) Tulosta näistä havainnoista lasketut otoshajonnat S_m, $m = 10, 20, \ldots, 100$,

$$S_m = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m} (X_i - \bar{X}_m)^2}.$$

(c) Laske ja tulosta lopuksi havaintojen keskiarvojen $\bar{X}_m$, $m = 10, 20, \ldots, 100$, luottamusvälit 95%:n luottamustasolla olettaen, että havainnot ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita noudattaen normaalijakaumaa, jonka varianssi on kuitenkin tuntematon.

D11/1 MCG-algoritmi (L11/25):

$$Z_{i+1} = (aZ_i) \mod m$$

Valinnoilla $m = 2^{31} - 1 = 2\,147\,483\,647$, $a = 16\,807$ ja $Z_0 = 920\,107$ saadaan

$$Z_1 = \ 431\,852\,820, \quad Z_2 = 1\,803\,102\,527, \quad Z_3 = 1\,602\,428\,472, \quad Z_4 = \ 422\,911\,877$$

U$(0,1)$-jakaumaan päästään normeeraamalla (L11/26):

$$U_i = \frac{Z_i}{m}$$

Näin ollen kysytyt satunnaisluvut ovat (6 numeron tarkkuudella)

$$U_1 = 0.201097, \quad U_2 = 0.839635, \quad U_3 = 0.746189, \quad U_4 = 0.196934$$

D11/2 (a) Satunnaismuutujan generoiminen U$(1,2)$-jakaumasta (L11/27):

$$X_i = 1 + U_i$$

Näin ollen kysytyt satunnaisluvut ovat (6 numeron tarkkuudella)

$$X_1 = 1.20110, \quad X_2 = 1.83964, \quad X_3 = 1.74619, \quad X_4 = 1.19693$$

(b) Lasketaan ensin Geom(p)-jakauman kertymäfunktio (L4/30):

$$F(n) = P\{X \le n\} = \sum_{i=0}^{n} P\{X = i\} = (1-p)\sum_{i=0}^{n} p^i = 1 - p^{n+1}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Erityisesti, kun $p = 1/2$, saamme

$$F(0) = 1/2 = 0.500, \quad F(1) = 3/4 = 0.750, \quad F(2) = 7/8 = 0.875, \quad \ldots$$

Satunnaismuutujan generoiminen Geom$(1/2)$-jakaumasta voidaan tehdä seuraavalla algoritmilla (L11/28):

$$X_i = \min\{n \mid F(n) \ge U_i\}$$

Näin ollen kysytyt satunnaisluvut ovat

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 2, \quad X_3 = 1, \quad X_4 = 0$$

(c) Satunnaismuutujan generoiminen Exp(2)-jakaumasta (L11/30):

$$X_i = -\frac{1}{2}\log(U_i)$$

Näin ollen kysytyt satunnaisluvut ovat (6 numeron tarkkuudella)

$$X_1 = 0.801984, \quad X_2 = 0.087394, \quad X_3 = 0.146388, \quad X_4 = 0.812444$$

D11/3 Havaintojen lukumäärä on $n = 6$ ja niiden keskiarvo $\bar{X}_n = 4.01$. Lisäksi tunnetaan yksittäisen havainnon varianssi $\sigma^2 = D^2[X_i] = 2$, joten parametrin α 95%:n luottamusväli on (L11/43)

$$\bar{X}_n \pm z_{0.975} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 4.01 \pm 1.96 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = 4.01 \pm 1.13 = (2.88, 5.14)$$

D11/4 Tehtävässä on ideana luoda sellainen simulattori, jolla voi simuloida systeemin kehitystä (so. liikenneprosessia) riippumatta siitä millainen on saapumis- tai poistumisväliaikojen jakauma. Tehtävää helpottaa nyt se, että olemme kiinnostuneita vain jonon keskipituudesta, jolloin meidän ei tarvitse pitää kirjaa yksittäisten saapumisten systeemissä viettämästä ajasta tms. Meille riittävä tilainformaatio on:

- systeemissä kullakin hetkellä olevien asiakkaiden lukumäärä,
- tieto, milloin tapahtuu seuraava saapuminen,
- tieto, milloin tapahtuu seuraava poistuminen,
- kumuloituva jononpituuden integraali.

Yksinkertaistaen voidaan simuloinnin kulku esittää seuraavasti:

1. Alustus (muuttujien alustus, alkutilan generointi yms.)
2. Onko aika loppu? Jos on, mene kohtaan 6, muuten siirry kohtaan 3.
3. Onko seuraava tapahtuma saapuminen? Jos on, kasvata tilamuuttujaa yhdellä, päivitä $Q(t)$ laskuria (jos ollaan ohitettu hetki $T_0 = 1000$) ja laske seuraavan saapumisen ajankohta. Jos saapuminen tapahtui tyhjään systeemiin, päivitä seuraava poistumisajankohta (asiakas pääsee suoraan palveltavaksi).
4. Onko seuraava tapahtuma poistuminen? Jos on, vähennä tilamuuttujaa yhdellä, päivitä $Q(t)$ laskuria (jos ollaan ohitettu hetki $T_0 = 1000$) ja laske seuraavan poistumisen ajankohta (jos systeemi on tyhjä, on seuraavan poistumisen ajankohta ääretön).
5. Palaa kohtaan 2.
6. Loppustatistiikan laskeminen

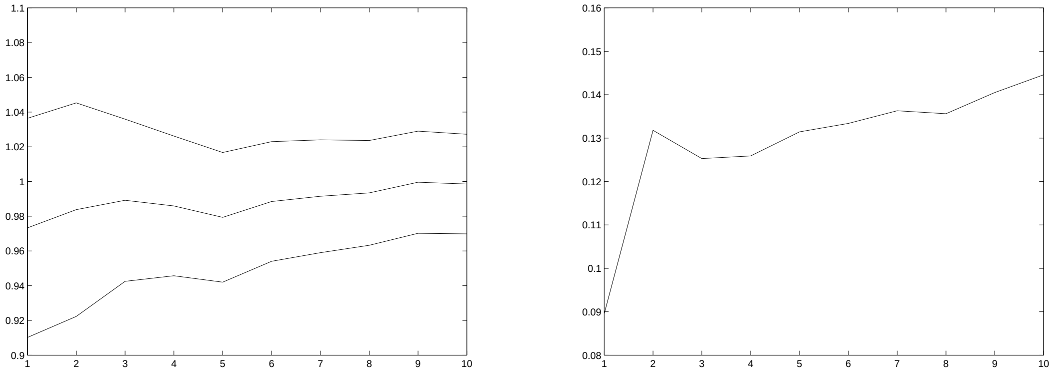
Tehtävänä on tarkastella estimaatin tarkentumista, kun käytettävissä olevien havaintojen määrä kasvaa. Alla olevassa kuvassa 1 on esitetty keskiarvon (vasen kuva) ja hajonnan (oikea kuva) tarkentuminen, kun käytettävien näytteiden määrä on $10, \ldots, 100$. Vasemmanpuolisessa kuvassa on lisäksi keskiarvon 95% luottamusvälit. Kuvasta voi havaita kuinka estimaatin arvon heilahtelu vähenee, kun näytteiden määrä kasvaa (tarkentuminen). Luottamusvälin kaventuminen johtuu siitä, että luottamusvälin leveys on verrannollinen keskiarvon hajontaan $D[\bar{X}_m]$, joka tarkentuu näytteiden määrän m kasvaessa (L11/40),

$$D[\bar{X}_m] = \frac{D[X_1]}{\sqrt{m}}.$$

Tässä $D[X_1]$ on yksittäisen näytteen (tuntematon) hajonta, jota voidaan estimoida otoshajonnalla (L11/45)

$$S_m = \sqrt{\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X}_m)^2}$$

Lisäksi voidaan havaita, että estimaatin arvo tarkentuu kohti teoreettista tasapainojakauman odotusarvoa (tässä tapauksessa $\rho/(1-\rho) = 1$), koska alkutransientin (systeemi oli tyhjä hetkellä $T = 0$) vaikutusta on vähennetty aloittamalla informaation keruu vasta hetkestä $T_0 = 1000$.



Kuva 1: [D11/4] Otoskeskiarvo ja sen 95%:n luottamusvälit (vasen) sekä otoshajonta (oikea) näytteiden määrän funktiona.