

**D10/1** Tarkastellaan seuraavaa yksinkertaista piiriyhteyksistä (runko)verkkoa. Verkossa on kolme solmua  $a$ ,  $b$  ja  $c$ , jotka on kytketty peräkkäin ketjuksi kahdella linkillä:  $a - b - c$ . Kummankin linkin kapasiteetti on 2 kanavaa. Verkkoa käyttää kolme eri yhteysluokkaa:

- Luokka 1 käyttää linkkiä  $a - b$
- Luokka 2 käyttää linkkiä  $b - c$
- Luokka 3 käyttää sekä linkkiä  $a - b$  että linkkiä  $b - c$

- (a) Mikä on systeemin tila-avaruus?  
(b) Entä kunkin luokan estotilat?

**D10/2** Jatketaan edellisessä tehtävässä kuvatun piiriyhteyksien verkon tarkastelua. Oletetaan, että eri luokkiin tulee uusia yhteyspyyntöjä Poisson-prosessin mukaisesti seuraavin intensiteetein:  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 1/3$  ja  $\lambda_3 = 2/3$  yhteyspyyntöä minuutissa. Eri yhteyksien kestoajat ovat toisistaan riippumattomia ja samoin jakautuneita keskiarvolla  $h = 3$  min. Laske kunkin luokan kokemat päästä-päähän estot

- (a) tarkalla kaavalla,  
(b) luennolla esitetyllä likimääräisellä tulorajamenetelmällä.

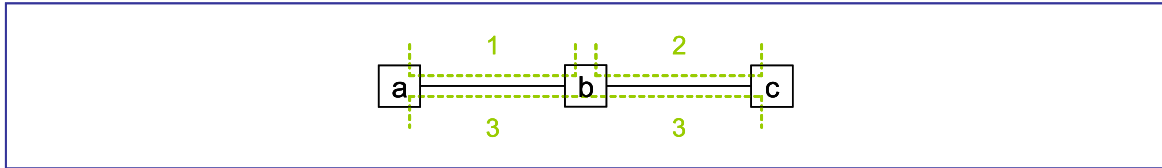
**D10/3** Tarkastellaan seuraavaa pakettiyhteyksistä (runko)verkkoa. Verkossa on kolme solmua:  $a$ ,  $b$  ja  $c$ , jotka on kytketty toisiinsa kolmioksi. Kutakin solmuparia yhdistää kaksi eri suuntiin kulkevaa (siis yksisuuntaista) 1 Gbps:n linkkiä. Verkossa on käytössä viisi erilaista reittiä:

- Reitti 1:  $a \rightarrow b$
- Reitti 2:  $a \rightarrow c \rightarrow b$
- Reitti 3:  $a \rightarrow c$
- Reitti 4:  $c \rightarrow b$
- Reitti 5:  $b \rightarrow a$

Eri reiteille ilmaantuu uusia paketteja riippumattomien Poisson-prosessien mukaisesti intensiteetein  $\lambda(1) = 40$ ,  $\lambda(2) = 60$ ,  $\lambda(3) = \lambda(4) = \lambda(5) = 20$  pakettia/ms. Pakettien pituudet ovat (toisistaan riippumattomasti) eksponentiaalisesti jakautuneita keskipituutenaan 1250 tavua. Laske

- (a) linkkikohtaiset kuormat ja  
(b) pakettien kokemat keskimääräiset päästä-päähän viiveet eri reiteillä.
-

**D10/1** Systemi koostuu kahdesta linkistä, joiden kapasiteetit ovat  $n_1 = n_2 = 2$ . Systemin tilaa kuvaa vektori  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , missä  $x_r$  kertoo luokkaan  $r$  kuuluvien (eli reittiä  $r$  käyttävien) yhteyksien lukumäärään. Verkon topologia ja eri reitit on esitetty kuvassa 1.



Kuva 1: [D10/1] Verkon topologia ja eri reitit.

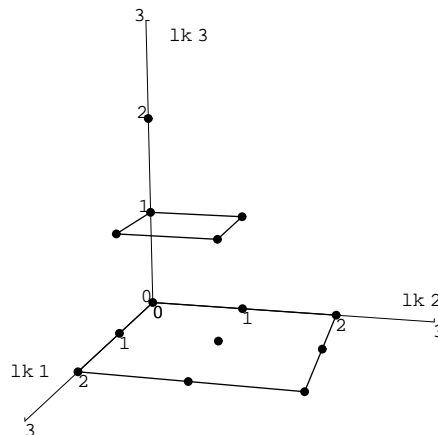
- (a) Systemin kaksi linkkiä asettavat seuraavat rajoitukset (L10/8) eri yhteyksien lukumäärille  $x_r$ :

$$x_1 + x_3 \leq n_1 = 2, \quad x_2 + x_3 \leq n_2 = 2$$

Näin ollen systemin tila-avaruudeksi  $\mathcal{S}$  saadaan:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \{ & (0, 0, 0), (1, 0, 0), (2, 0, 0), \\ & (0, 1, 0), (1, 1, 0), (2, 1, 0), \\ & (0, 2, 0), (1, 2, 0), (2, 2, 0), \\ & (0, 0, 1), (1, 0, 1), \\ & (0, 1, 1), (1, 1, 1), \\ & (0, 0, 2) \} \end{aligned}$$

Tila-avaruus on esitetty kuvassa 2.



Kuva 2: [D10/1] Tila-avaruus.

- (b) 1° Luokka 1 käyttää vain linkkiä 1, joten siihen liittyvät estottomat tilat  $\mathcal{S}_1$  toteuttavat ehdot (L10/10):

$$x_1 + x_3 \leq n_1 - 1 = 1, \quad x_2 + x_3 \leq n_2 = 2$$

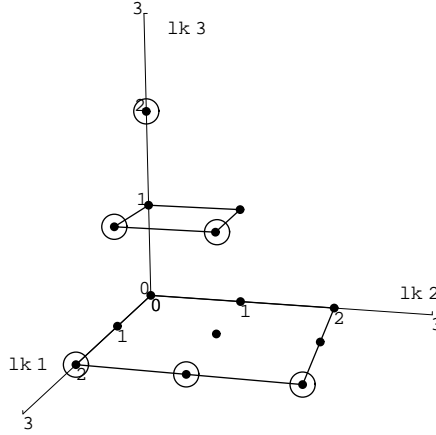
Näin ollen

$$\mathcal{S}_1 = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0), (0, 2, 0), (1, 2, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1)\}$$

Luokan 1 estotilat  $\mathcal{S}_1^B = \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_1$  ovat siis

$$\mathcal{S}_1^B = \{(2, 0, 0), (2, 1, 0), (2, 2, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 0, 2)\}$$

Estotilojen joukko on esitetty kuvassa 3.



Kuva 3: [D10/1] Luokan 1 estotilat ympyröitynä.

2° Luokka 2 käyttää vain linkkiä 2, joten siihen liittyvät estottomat tilat  $\mathcal{S}_2$  toteuttavat ehdot (L10/10):

$$x_1 + x_3 \leq n_1 = 2, \quad x_2 + x_3 \leq n_2 - 1 = 1$$

Näin ollen

$$\mathcal{S}_2 = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0), (2, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1)\}$$

Luokan 2 estotilat  $\mathcal{S}_2^B = \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_2$  ovat siis

$$\mathcal{S}_2^B = \{(0, 2, 0), (1, 2, 0), (2, 2, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1), (0, 0, 2)\}.$$

Estotilojen joukko on esitetty kuvassa 4.

3° Luokka 3 käyttää kumpaakin linkkiä, joten siihen liittyvät estottomat tilat  $\mathcal{S}_3$  toteuttavat ehdot (L10/10):

$$x_1 + x_3 \leq n_1 - 1 = 1, \quad x_2 + x_3 \leq n_2 - 1 = 1$$

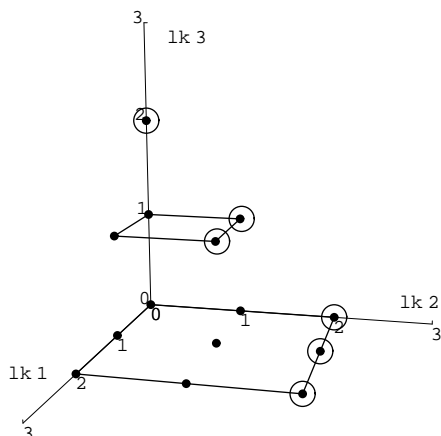
Näin ollen

$$\mathcal{S}_3 = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

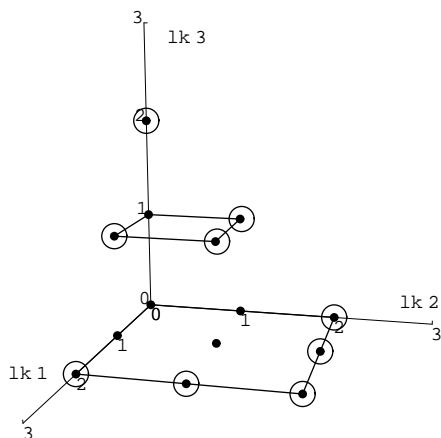
Luokan 3 estotilat  $\mathcal{S}_3^B = \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_3$  ovat siis

$$\mathcal{S}_3^B = \{(2, 0, 0), (2, 1, 0), (0, 2, 0), (1, 2, 0), (2, 2, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1), (0, 0, 2)\}$$

Estotilojen joukko on esitetty kuvassa 5.



Kuva 4: [D10/1] Luokan 2 estotilat ympyröitynä.



Kuva 5: [D10/1] Luokan 3 estotilat ympyröitynä.

**D10/2** (a) Eri luokkien kokemien päästä-päähän estojen tarkkaa laskentaa varten tarvitaan eri luokkien liikenneintensiteetit (L10/12):

$$a_1 = \lambda_1 h = 0 \cdot 3 = 0 \text{ erl}, \quad a_2 = \lambda_2 h = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 \text{ erl}, \quad a_3 = \lambda_3 h = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2 \text{ erl}$$

Koska luokan 1 liikenneintensiteetti on 0, ko. luokka pysyy aina tyhjänä ja tila-avaruus kutistuu joukoksi

$$\mathcal{S} = \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$$

Tasapainojakaumaksi tulee siten (L10/13):

$$\pi(\mathbf{x}) = \pi(0, x_2, x_3) = \pi(0, 0, 0) \frac{a_2^{x_2}}{x_2!} \frac{a_3^{x_3}}{x_3!} = \pi(0, 0, 0) \frac{1}{x_2!} \frac{2^{x_3}}{x_3!},$$

missä

$$\pi(0, 0, 0) = \left( \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}} \frac{a_2^{x_2}}{x_2!} \frac{a_3^{x_3}}{x_3!} \right)^{-1} = \left( \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}} \frac{1}{x_2!} \frac{2^{x_3}}{x_3!} \right)^{-1}$$

Siis

$$\begin{aligned}\pi(0,0,0) &= \frac{1}{1+1+\frac{1}{2}+2+2+2} = \frac{2}{17} = 0.118 \\ \pi(0,1,0) &= \pi(0,0,0) \frac{1}{1!} \frac{2^0}{0!} = \pi(0,0,0) \cdot 1 = \frac{2}{17} = 0.118 \\ \pi(0,2,0) &= \pi(0,0,0) \frac{1}{2!} \frac{2^0}{0!} = \pi(0,0,0) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{17} = 0.059 \\ \pi(0,0,1) &= \pi(0,0,0) \frac{1}{0!} \frac{2^1}{1!} = \pi(0,0,0) \cdot 2 = \frac{4}{17} = 0.235 \\ \pi(0,1,1) &= \pi(0,0,0) \frac{1}{1!} \frac{2^1}{1!} = \pi(0,0,0) \cdot 2 = \frac{4}{17} = 0.235 \\ \pi(0,0,2) &= \pi(0,0,0) \frac{1}{0!} \frac{2^2}{2!} = \pi(0,0,0) \cdot 2 = \frac{4}{17} = 0.235\end{aligned}$$

Koska luokka 1 pysyy tyhjänä, ainoa luokan 1 estotila on  $(0,0,2)$ , joten luokan 1 (hypotettinen) päästä-päähän esto (L10/16) on

$$B_1 = \pi(0,0,2) = \frac{4}{17} = 0.235$$

Vastaavasti luokkien 2 ja 3 estotilojen joukko kutistuu niin että päästä-päähän estoksi (L10/16) tulee kummallekin

$$B_2 = B_3 = \pi(0,2,0) + \pi(0,1,1) + \pi(0,0,2) = \frac{1+4+4}{17} = \frac{9}{17} = 0.53$$

Itse asiassa luokkien 2 ja 3 esto saadaan (aivan yhtä hyvin) Erlangin kaavasta parametreillä  $n = n_2 = 2$  ja  $a = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3$  erl, kun havaitaan, että tapauksessa  $x_2 = 0$  luokkien 2 ja 3 estotilat toteuttavat

$$x_2 + x_3 = n_2 = 2.$$

Jos siis lasketaan vain päällä olevien yhteyksien kokonaislukumäärää, kyseessä on selvästikin kahden palvelijan puhdas estojärjestelmä. Siis

$$B_2 = B_3 = \text{Erl}(n_2, a_2 + a_3) = \text{Erl}(2, 3) = \frac{\frac{9}{2}}{1+3+\frac{9}{2}} = \frac{9}{17} = 0.53$$

- (b) Tulorajamenetelmässä lasketaan ensin esto kullakin linkillä erikseen (olettaen, että ko. linkki olisi ainoa rajoittava tekijä).

Linkkiä 1 käyttävät luokat 1 ja 3, joten linkin 1 estoksi  $B(1)$  saadaan Erlangin kaavalla (L10/19)

$$B(1) = \text{Erl}(n_1, a_1 + a_3) = \text{Erl}(2, 2) = \frac{2}{1+2+2} = \frac{2}{5} = 0.40$$

Linkkiä 2 taas käyttävät luokat 2 ja 3, joten linkin 2 estoksi  $B(2)$  saadaan samoin Erlangin kaavalla (L10/19)

$$B(2) = \text{Erl}(n_2, a_2 + a_3) = \text{Erl}(2, 3) = \frac{\frac{9}{2}}{1+3+\frac{9}{2}} = \frac{9}{17} = 0.53$$

Tulorajamenetelmä antaa siis seuraavat approksimaatiot eri luokkien päästä-päähän estotodennäköisyyksille  $B_r$  (L10/20):

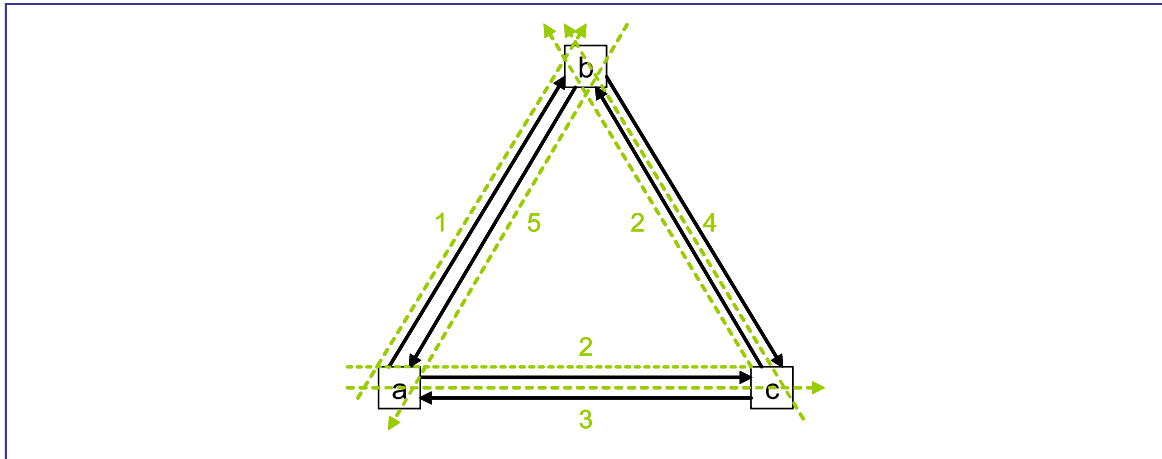
$$B_1 \approx 1 - (1 - B(1)) = B(1) = \frac{2}{5} = 0.40,$$

$$B_2 \approx 1 - (1 - B(2)) = B(2) = \frac{9}{17} = 0.53,$$

$$B_3 \approx 1 - (1 - B(1))(1 - B(2)) = B(1) + B(2) - B(1)B(2) = \frac{61}{85} = 0.72$$

Mieti, miksi päästä-päähän estojen  $B_1$ :n ja  $B_3$ :n tarkat arvot eroavat vastaavista tuloraja-approksimaatioista, mutta  $B_2$ :n tuloraja-approksimaatio on sama kuin tarkka arvo.

**D10/3** Systeemi koostuu kuudesta linkistä  $j$ , joiden kaikkien kapasiteetti on  $C_j = 1$  Gbps. Verkon topologia ja eri reitit on esitetty kuvassa 6.



Kuva 6: [D10/3] Verkon topologia ja eri reitit.

(a) Pakettien saapumisintensiteetit (pakettia/ms) eri linkeille ovat (L10/32)

$$\lambda_{ab} = \lambda(1) = 40,$$

$$\lambda_{ba} = \lambda(5) = 20,$$

$$\lambda_{bc} = 0,$$

$$\lambda_{cb} = \lambda(2) + \lambda(4) = 80,$$

$$\lambda_{ca} = 0,$$

$$\lambda_{ac} = \lambda(2) + \lambda(3) = 80$$

Koska pakettien keskipituus on  $L = 1250 \cdot 8 = 10^4$  b ja linkkien kapasiteetti  $C_j = 10^6$  b/ms, kunkin linkin  $j$  palvelukyky (pakettia/ms) on

$$\mu_j = \frac{C}{L} = \frac{10^6}{10^4} = 100$$

Eri linkkien kuormat  $\rho_j = \lambda_j/\mu_j$  ovat siis

$$\begin{aligned}\rho_{ab} &= 0.40, \\ \rho_{ba} &= 0.20, \\ \rho_{bc} &= 0, \\ \rho_{cb} &= 0.80, \\ \rho_{ca} &= 0, \\ \rho_{ac} &= 0.80\end{aligned}$$

(b) Pakettien keskiviiveet eri linkeillä saadaan M/M/1 mallista (L10/35)

$$\bar{T}_j = \frac{1}{\mu_j - \lambda_j}$$

Näin saadaan seuraavat linkkikohtaiset keskiviiveet (ms):

$$\begin{aligned}\bar{T}_{ab} &= \frac{1}{100 - 40} = \frac{1}{60} = 0.017, \\ \bar{T}_{ba} &= \frac{1}{100 - 20} = \frac{1}{80} = 0.013, \\ \bar{T}_{bc} &= \frac{1}{100 - 0} = \frac{1}{100} = 0.001, \\ \bar{T}_{cb} &= \frac{1}{100 - 80} = \frac{1}{20} = 0.050, \\ \bar{T}_{ca} &= \frac{1}{100 - 0} = \frac{1}{100} = 0.001, \\ \bar{T}_{ac} &= \frac{1}{100 - 80} = \frac{1}{20} = 0.050\end{aligned}$$

Reittiä  $r$  noudattavien pakettien kokema keskmääräinen päästä-päähän viive saadaan lopulta reitin kuuluvien linkkiviiveiden summana:

$$\begin{aligned}\bar{T}(1) &= \bar{T}_{ab} = \frac{1}{60} = 0.017, \\ \bar{T}(2) &= \bar{T}_{ac} + \bar{T}_{cb} = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{10} = 0.100, \\ \bar{T}(3) &= \bar{T}_{ac} = \frac{1}{20} = 0.050, \\ \bar{T}(4) &= \bar{T}_{cb} = \frac{1}{20} = 0.050, \\ \bar{T}(5) &= \bar{T}_{ba} = \frac{1}{80} = 0.013\end{aligned}$$