TEKNILLINEN KORKEAKOULU **Demonstraatiot**
Tietoliikenne- ja tietoverkkotekniikan laitos **Luento 9**
S-38.1145 Liikenneteorian perusteet, Kevät 2008 14.2.2008

D9/1 Tarkastellaan kahden reitittimen välistä elastista dataliikennettä vuotasolla. Liikenne muodostuu TCP-voista, joita syntyy intensiteetillä λ ja jotka jakavat yhteisen runkoverkon linkin. Merkitään vuon kokoa L:llä ja linkin kapasiteettia C:llä. Ko. yhteisen linkin lisäksi jokaisen vuon nopeutta rajoittaa sen oma liityntälinkki. Oletetaan nämä liityntälinkit samantyyppisiksi kapasiteettinaan r.

(a) Käytä M/M/n-PS liikennemallia ja laske vuon läpimeno θ eli keskimääräinen lähetysnopeus tapauksessa $\lambda = 80$ vuota/s, $E[L] = 0.125 \cdot 10^6$ tavua, $C = 100$ Mbps ja $r = 10$ Mbps.

(b) Entäpä jos $C = 10$ Gbps?

D9/2 Tarkastellaan uudelleen edellisen tehtävän tilannetta, jossa runkoverkon linkkiä kuormittaa elastinen dataliikenne. Oletetaan edelleen, että $\lambda = 80$ vuota/s, ja $E[L] = 0.125 \cdot 10^6$ tavua, mutta nyt $C = r = 100$ Mbps. Oletetaan lisäksi, että ylikuormituksen estämiseksi käytössä on seuraavanlainen voiden pääsynvalvontamekanismi: yhtaikaa päällä olevien TCP-voiden lukumäärä voi olla korkeintaan 10. Merkitään $X(t)$:llä linkkiä kuormittavien voiden lukumäärää hetkellä t. Kyseessä on Markov-prosessi.

(a) Mikä liikennemalli on kyseessä (Kendallin merkinnöin)?

(b) Piirrä $X(t)$:n tilasiirtymäkaavio.

(c) Johda $X(t)$:n tasapainojakauma.

(d) Montako vuota keskimäärin kuormittaa linkkiä?

D9/3 Tarkastellaan M/M/1/3/3-PS liikennemallia. Laske asiakkaan keskimääräinen viive ja suhteellinen läpäisynopeus tapauksessa $1/\nu = 1/\mu = 1$ (aikayksikkö).

D9/1 (a) Kyseessä on M/M/n-malli, missä (L9/25)

$$n = \frac{C}{r} = \frac{100}{10} = 10$$

Vuon läpimeno eli keskimääräinen lähetysnopeus on tässä mallissa (L9/25)

$$\theta = \frac{E[L]}{E[D]} = r \cdot \frac{n(1-\rho)}{p_W + n(1-\rho)},$$

missä ρ on (yhteisen linkin) kuorma (L9/15),

$$\rho = \frac{\lambda}{n\mu} = \frac{\lambda}{\frac{C}{E[L]}} = \frac{80}{\frac{100 \cdot 10^6}{8 \cdot 0.125 \cdot 10^6}} = \frac{4}{5} = 0.8,$$

ja p_W on odottamaanjoutumistodennäköisyys (L9/20, L8/31),

$$p_W = \frac{\beta}{\alpha + \beta} = \frac{\frac{(n\rho)^n}{n!(1-\rho)}}{\sum_0^{n-1} \frac{(n\rho)^i}{i!} + \frac{(n\rho)^n}{n!(1-\rho)}} = \cdots \overset{\text{num.}}{=} 0.41$$

Vuon läpimeno on siis

$$\theta = r \cdot \frac{n(1-\rho)}{p_W + n(1-\rho)} = 10 \cdot \frac{2}{0.41 + 2} = 8.3 \text{ Mbps}$$

(b) Kun C kasvaa tarpeeksi (ja samalla tarjottu liikenne kuitenkin pysyy samana $\lambda E[L] = 80$ Mbps), yhteinen linkki ei enää oleellisesti rajoita vuota, vaan sen läpimeno tulee lähes samaksi kuin liityntälinkin nopeus $r = 10$ Mbps. Tapauksessa $C = 10$ Gbps käy juuri näin:

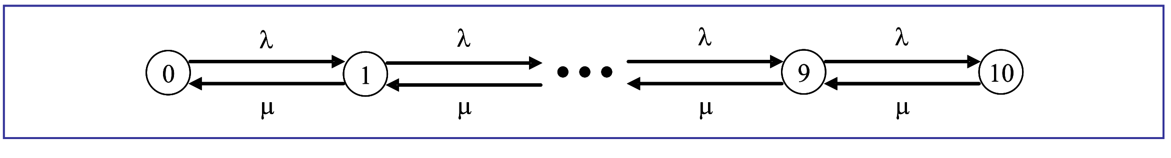
$$\theta \approx r = 10 \text{ Mbps}$$

D9/2 (a) Koska nyt

$$n = \frac{C}{r} = \frac{100}{100} = 1$$

ja lisäksi pääsynvalvonta rajoittaa voiden lukumäärän maksimissaan kymmeneksi, kyseessä on selvästikin M/M/1/10-PS malli parametrein $\lambda = 80$ vuota/s ja $\mu = r/E[L] = 100$ vuota/s.

(b) Markov-prosessin $X(t)$ tilasiirtymäkaavio on esitetty kuvassa 1.



Kuva 1: [D9/2] Tilasiirtymäkaavio.

(c) Kyseessä on selvästikin pelkistymätön syntymä-kuolema-prosessi (L6/16). Koska tila-avaruus on äärellinen, tasapainojakauma π on olemassa, ja se löytyy lokaalien tasapainoehtojen ja normeerausehdon avulla (L6/17).

Kirjoitetaan ensin lokaalit tasapainoehdot (LBE) tilapareille $(i-1, i)$, $i = 1, \ldots, N$:

$$\pi_{i-1}\lambda = \pi_i\mu$$

Tästä saadaan rekursiivisesti

$$\pi_i = \pi_{i-1}(\frac{\lambda}{\mu}) = \pi_{i-2}(\frac{\lambda}{\mu})^2 = \ldots = \pi_0(\frac{\lambda}{\mu})^i = \pi_0\,\rho^i,$$

missä $\rho = \lambda/\mu = 80/100 = 0.8$. Puuttuva todennäköisyys π_0 selviää normeerausehdosta (N):

$$\pi_0 + \pi_1 + \ldots + \pi_{10} = \pi_0 \sum_{i=0}^{10} \rho^i = \pi_0 \frac{1-\rho^{11}}{1-\rho} = 1$$

Näin ollen

$$\pi_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{11}} = \frac{0.2}{1-(0.8)^{11}} \overset{\text{num.}}{=} 0.219$$

Muut todennäköisyydet saadaan tästä aiemmalla kaavalla. Alla ne on koottu vektoriin

$$\begin{aligned}\pi &= (\pi_i \mid i = 0, 1, \ldots, 10)\\ &= (0.219, 0.175, 0.140, 0.112, 0.090, 0.072, 0.057, 0.046, 0.0370.029, 0.023)\end{aligned}$$

(d) Keskimääräinen voiden lukumäärä on

$$E[X] = \sum_{i=0}^{10} i \cdot \pi_i = \ldots \overset{\text{num.}}{=} 2.97$$

D9/3 M/M/1/k/k-mallin tasapainojakauma on johdettu luennoilla (L9/31):

$$\pi_i = \frac{\frac{(\frac{\nu}{\mu})^i}{(k-i)!}}{\sum_{j=0}^{k} \frac{(\frac{\nu}{\mu})^j}{(k-j)!}}.$$

Tapauksessa $k = 3$ ja $\nu = \mu = 1$,

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+1+1} = \frac{1}{1+3+6+6} = \frac{1}{16} = 0.062\\ \pi_1 &= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+1+1} = \frac{3}{1+3+6+6} = \frac{3}{16} = 0.187\\ \pi_2 &= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+1+1} = \frac{6}{1+3+6+6} = \frac{6}{16} = 0.375\\ \pi_3 &= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+1+1} = \frac{6}{1+3+6+6} = \frac{6}{16} = 0.375\end{aligned}$$

Lasketaan ensin keskimääräinen systeemissä olevien asiakkaiden lukumäärä:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{3} i \cdot \pi_i = \frac{3}{16} + 2 \cdot \frac{6}{16} + 3 \cdot \frac{6}{16} = \frac{33}{16} = 2.062$$

Jotta voitaisiin soveltaa Littlen kaavaa, on lisäksi tunnettava asiakkaiden saapumisintensiteetti systeemiin. Tilassa $X = i$ ollaan todennäköisyydellä π_i ja systeemin saapuu tässä tilassa uusia asiakkaita intesiteetillä $(3 - i)\nu$, joten saapumisintensiteetiksi tulee (tapauksessa $\nu = 1$)

$$\lambda = \sum_{i=0}^{3} (3 - i)\nu \cdot \pi_i = 3 \cdot \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{3}{16} + \frac{6}{16} = \frac{15}{16} = 0.937$$

Siis Littlen kaavan (L1/31) nojalla keskimääräinen viive on

$$E[D] = \frac{E[X]}{\lambda} = \frac{11}{5} = 2.2$$

Keskimääräinen palveluaika taas on $E[S] = 1/\mu = 1$, joten suhteelliseksi läpäisynopeudeksi (vrt. L9/22) tulee

$$\frac{E[S]}{E[D]} = \frac{1}{\frac{11}{5}} = \frac{5}{11} = 0.454$$