D8/1 Tarkastellaan seuraavanlaista yksinkertaista liikenneteoreettista mallia: asiakkaat saapuvat Poisson-prosessin mukaisesti intensiteetillä λ, palveluajat ovat riippumattomia ja eksponentiaalisesti jakautuneita keskiarvonaan $1/\mu$, käytössä on yksi palvelija, odotuspaikkojen lkm $m < \infty$ ja jonokurina FIFO. Merkitään $X(t)$:llä systeemissä olevien asiakkaiden lkm:ää hetkellä t. Kyseessä on Markov-prosessi.

(a) Mikä liikennemalli on kyseessä (Kendallin merkinnöin)?

(b) Piirrä $X(t)$:n tilasiirtymäkaavio.

(c) Johda $X(t)$:n tasapainojakauma.

(d) Millä todennäköisyydellä uusi asiakas menetetään?

(e) Millä todennäköisyydellä systeemiin hyväksytty asiakas joutuu odottamaan?

D8/2 Tarkastellaan tyyppiä M/M/2/3 olevaa liikenneteoreettista mallia, jossa asiakkaiden saapumisten väliaika on keskimäärin $1/\lambda$ aikayksikköä ja jossa asiakkaan keskimääräinen palveluaika on $1/\mu$ aikayksikköä. Merkitään $X(t)$:llä systeemissä olevien asiakkaiden lukumäärää hetkellä t. Kyseessä on Markov-prosessi.

(a) Piirrä $X(t)$:n tilasiirtymäkaavio.

(b) Johda $X(t)$:n tasapainojakauma.

(c) Millä todennäköisyydellä uusi asiakas menetetään tapauksessa $\lambda = \mu$?

(d) Mikä on systeemin keskimääräinen käyttöaste tapauksessa $\lambda = \mu$?

D8/3 Tarkastellaan kahden palvelijan (estollista) jonotusjärjestelmää, jossa on yksi odotuspaikka. Kuten tehtävässä D7/3 asiakkaat saapuvat systeemiin ryppäinä, joiden koko on 1 tai 2 asiakasta. Kumpikin rypäskoko on yhtä todennäköinen. Asiakasryppäitä saapuu Poisson-prosessin mukaisesti intensiteetillä λ. Asiakasrypäs menetetään kokonaan, jos systeemi on täynnä ryppään saapuessa. Jos taas systeemin odotuspaikka on vapaa ja sinne pyrkii kahden asiakkaan rypäs, toinen asiakkaista menetetään. Vaikka asiakkaat saapuvat ryppäinä, heidät palvellaan yksitellen. Yksittäisen asiakkaan palveluaika noudattaa muista riippumatta Exp(μ)-jakaumaa. Merkitään $X(t)$:llä systeemissä olevien asiakkaiden lukumäärää. Kyseessä on Markov-prosessi.

(a) Piirrä $X(t)$:n tilasiirtymäkaavio.

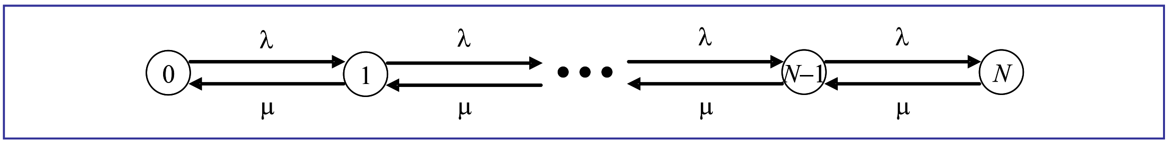
(b) Johda $X(t)$:n tasapainojakauma.

(c) Mikä on systeemin keskimääräinen käyttöaste tapauksessa $\lambda = \mu$?

(d) Mikä on systeemin hyväksyttyjen asiakkaiden keskimääräinen odotusaika tapauksessa $1/\lambda = 1/\mu = 1$ (aikayksikkö)?

D8/1 (a) Kyseessä on M/M/1/N-malli, missä $N = m + 1$.

(b) Markov-prosessin $X(t)$ tilasiirtymäkaavio on esitetty kuvassa 1.



Kuva 1: [D8/1] Tilasiirtymäkaavio.

(c) Kyseessä on selvästikin pelkistymätön syntymä-kuolema-prosessi (L6/16). Koska tila-avaruus on äärellinen, tasapainojakauma π on olemassa, ja se löytyy lokaalien tasapainoehtojen ja normeerausehdon avulla (L6/17).

Kirjoitetaan ensin lokaalit tasapainoehdot (LBE) vierekkäisille tilapareille $(i-1, i)$, $i = 1, \ldots, N$:

$$\pi_{i-1}\lambda = \pi_i \mu$$

Tästä saadaan rekursiivisesti

$$\pi_i = \pi_{i-1}\,\frac{\lambda}{\mu} = \pi_{i-2}(\frac{\lambda}{\mu})^2 = \ldots = \pi_0(\frac{\lambda}{\mu})^i = \pi_0\,\rho^i,$$

missä $\rho = \lambda/\mu$. Puuttuva todennäköisyys π_0 selviää normeerausehdosta (N):

$$\pi_0 + \pi_1 + \ldots + \pi_N = \pi_0 \sum_{i=0}^{N} \rho^i = 1$$

Näin ollen

$$\pi_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{N+1}, & \text{jos } \rho = 1, \\ \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}, & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Tasapainojakaumaksi tulee siis katkaistu geometrinen jakauma (joka erikoistapauksessa $\rho = 1$ johtaa diskreettiin tasajakaumaan):

$$\pi_i = \begin{cases} \dfrac{1}{N+1}, & \text{jos } \rho = 1, \\ \dfrac{(1-\rho)\rho^i}{1-\rho^{N+1}}, & \text{muutoin.} \end{cases} \qquad (i = 0, 1, \ldots, N)$$

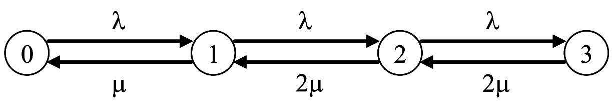
(d) Asiakas menetetään, jos systeemi on täynnä asiakkaan saapuessa. Poisson-prosessin PASTA-ominaisuuden (L5/28) nojalla tämän tapahtuman todennäköisyys on sama kuin tasapainojakauman vastaavan tilan todennäköisyys π_N. Siis

$$P\{\text{“asiakas menetetään”}\} = P\{X = N\} = \pi_N = \begin{cases} \dfrac{1}{N+1}, & \text{jos } \rho = 1, \\ \dfrac{(1-\rho)\rho^N}{1-\rho^{N+1}}, & \text{muutoin.} \end{cases}$$

(e) Vain tapauksessa, että systeemi on tyhjä, systeemiin hyväksytty asiakas pääsee suoraan palveluun eikä joudu odottamaan. PASTA-ominaisuuden nojalla voidaan tarvittavat todennäköisyydet laskea tasapainojakaumasta. Näin ollen

$$\begin{aligned}
&P\{\text{“asiakas joutuu odottamaan”} \mid \text{“hyväksytty systeemiin”}\} \\
&= 1 - P\{X = 0 \mid X < N\} \\
&= 1 - \frac{P\{X = 0\}}{P\{X < N\}} \\
&= 1 - \frac{\pi_0}{1 - \pi_N} \\
&= \begin{cases} \dfrac{N-1}{N}, & \text{jos } \rho = 1, \\ \dfrac{\rho - \rho^N}{1 - \rho^N}, & \text{muutoin.} \end{cases}
\end{aligned}$$

D8/2 (a) Markov-prosessin $X(t)$ tilasiirtymäkaavio on esitetty kuvassa 2.



Kuva 2: [D8/2] Tilasiirtymäkaavio.

(b) Kyseessä on selvästikin pelkistymätön syntymä-kuolema-prosessi (L6/16). Koska tila-avaruus on äärellinen, tasapainojakauma π on olemassa, ja se löytyy lokaalien tasapainoehtojen ja normeerausehdon avulla (L6/17).

Kirjoitetaan ensin lokaalit tasapainoehdot (LBE) vierekkäisille tilapareille:

$$\pi_0\lambda = \pi_1\mu, \quad \pi_1\lambda = \pi_2\, 2\mu, \quad \pi_2\lambda = \pi_3\, 2\mu$$

Tästä ratkaistaan muut todennäköisyydet π_0:n funktiona:

$$\pi_1 = \pi_0\, \frac{\lambda}{\mu}, \quad \pi_2 = \pi_0\, \frac{1}{2}(\frac{\lambda}{\mu})^2, \quad \pi_3 = \pi_0\, \frac{1}{4}(\frac{\lambda}{\mu})^3$$

Puuttuva todennäköisyys π_0 selviää normeerausehdosta (N):

$$\pi_0 + \pi_1 + \ldots + \pi_N = \pi_0 \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2}(\frac{\lambda}{\mu})^2 + \frac{1}{4}(\frac{\lambda}{\mu})^3\right) = 1$$

Näin ollen tasapainojakaumaksi tulee

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2}(\frac{\lambda}{\mu})^2 + \frac{1}{4}(\frac{\lambda}{\mu})^3}, \quad \pi_1 = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2}(\frac{\lambda}{\mu})^2 + \frac{1}{4}(\frac{\lambda}{\mu})^3},$$

$$\pi_2 = \frac{\frac{1}{2}(\frac{\lambda}{\mu})^2}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2}(\frac{\lambda}{\mu})^2 + \frac{1}{4}(\frac{\lambda}{\mu})^3}, \quad \pi_3 = \frac{\frac{1}{4}(\frac{\lambda}{\mu})^3}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2}(\frac{\lambda}{\mu})^2 + \frac{1}{4}(\frac{\lambda}{\mu})^3}$$

Kohtia (c) ja (d) varten lasketaan tasapainojakauma tapauksessa $\lambda = \mu$:

$$\pi_0 = \frac{4}{11} = 0.36, \quad \pi_1 = \frac{4}{11} = 0.36, \quad \pi_2 = \frac{2}{11} = 0.18, \quad \pi_3 = \frac{1}{11} = 0.09$$

(c) Asiakas menetetään, jos systeemi on täynnä asiakkaan saapuessa. Poisson-prosessin PASTA-ominaisuuden (L5/28) nojalla tämän tapahtuman todennäköisyys on sama kuin tasapainojakauman vastaavan tilan todennäköisyys π_3. Siis

$$P\{\text{“asiakas menetetään”}\} = \pi_3 = \frac{1}{11} = 0.09$$

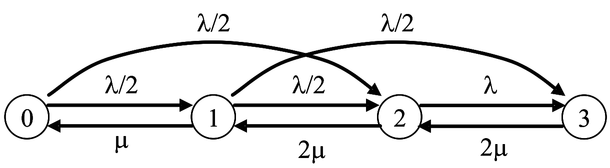
(d) Lasketaan ensin keskimäärin käytössä olevien palvelijoiden lukumäärä $E[X_\mathrm{S}]$:

$$E[X_\mathrm{S}] = \pi_1 + 2(\pi_2 + \pi_3) = \frac{4}{11} + 2 \cdot \left(\frac{2}{11} + \frac{1}{11}\right) = \frac{10}{11} = 0.91$$

Systeemin keskimääräinen käyttöaste $E[U]$ on keskimäärin käytössä olevien palvelijoiden lukumäärän suhde palvelijoiden kokonaismäärään:

$$E[U] = \frac{E[X_\mathrm{S}]}{n} = \frac{\frac{10}{11}}{2} = \frac{5}{11} = 0.45$$

D8/3 (a) Markov-prosessin $X(t)$ tilasiirtymäkaavio on esitetty kuvassa 3.



Kuva 3: [D8/3] Tilasiirtymäkaavio.

(b) Kyseessä on selvästikin pelkistymätön Markov-prosessi. Koska tila-avaruus on äärellinen, tasapainojakauma π on olemassa, ja se löytyy globaalien tasapaino-ehtojen ja normeerausehdon avulla.
Kirjoitetaan ensin globaalit tasapainoehdot (GBE) tiloille 0, 1 ja 2:

$$\pi_0\lambda = \pi_1\mu, \quad \pi_1(\lambda+\mu) = \pi_0\,\frac{\lambda}{2} + \pi_2\,2\mu, \quad \pi_2(\lambda+2\mu) = \pi_1\,\frac{\lambda}{2} + \pi_3\,2\mu$$

Tästä ratkaistaan muut todennäköisyydet π_0:n funktiona:

$$\pi_1 = \pi_0\,\frac{\lambda}{\mu}, \quad \pi_2 = \pi_0\left(\frac{1}{4}(\frac{\lambda}{\mu}) + \frac{1}{2}(\frac{\lambda}{\mu})^2\right), \quad \pi_3 = \pi_0\left(\frac{3}{8}(\frac{\lambda}{\mu})^2 + \frac{1}{4}(\frac{\lambda}{\mu})^3\right)$$

Puuttuva todennäköisyys π_0 selviää normeerausehdosta (N):

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = \pi_0\left(1 + \frac{5}{4}(\frac{\lambda}{\mu}) + \frac{7}{8}(\frac{\lambda}{\mu})^2 + \frac{1}{4}(\frac{\lambda}{\mu})^3\right) = 1,$$

joten tasapainojakaumaksi tulee

$$\pi_0 = \frac{1}{1+\frac{5}{4}(\frac{\lambda}{\mu})+\frac{7}{8}(\frac{\lambda}{\mu})^2+\frac{1}{4}(\frac{\lambda}{\mu})^3}, \quad \pi_1 = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1+\frac{5}{4}(\frac{\lambda}{\mu})+\frac{7}{8}(\frac{\lambda}{\mu})^2+\frac{1}{4}(\frac{\lambda}{\mu})^3},$$
$$\pi_2 = \frac{\frac{1}{4}(\frac{\lambda}{\mu})+\frac{1}{2}(\frac{\lambda}{\mu})^2}{1+\frac{5}{4}(\frac{\lambda}{\mu})+\frac{7}{8}(\frac{\lambda}{\mu})^2+\frac{1}{4}(\frac{\lambda}{\mu})^3}, \quad \pi_3 = \frac{\frac{3}{8}(\frac{\lambda}{\mu})^2+\frac{1}{4}(\frac{\lambda}{\mu})^3}{1+\frac{5}{4}(\frac{\lambda}{\mu})+\frac{7}{8}(\frac{\lambda}{\mu})^2+\frac{1}{4}(\frac{\lambda}{\mu})^3}$$

Kohtia (c) ja (d) varten lasketaan tasapainojakauma tapauksessa $\lambda = \mu$:

$$\pi_0 = \frac{8}{27} = 0.30, \quad \pi_1 = \frac{8}{27} = 0.30, \quad \pi_2 = \frac{6}{27} = 0.22, \quad \pi_3 = \frac{5}{27} = 0.19$$

(c) Lasketaan ensin käytössä olevien palvelijoiden lukumäärän odotusarvo $E[X_{\mathrm{S}}]$:

$$E[X_{\mathrm{S}}] = \pi_1 + 2(\pi_2+\pi_3) = \frac{8}{27} + 2\cdot\left(\frac{6}{27}+\frac{5}{27}\right) = \frac{10}{9} = 1.11$$

Systeemin keskimääräinen käyttöaste $E[U]$ on keskimäärin käytössä olevien palvelijoiden lukumäärän suhde palvelijoiden kokonaismäärään:

$$E[U] = \frac{E[X_{\mathrm{S}}]}{n} = \frac{\frac{10}{9}}{2} = \frac{5}{9} = 0.56$$

(d) Tilassa 3 yksi asiakas on odottamassa. Muissa tiloissa ei asiakkaita ole odottamassa. Näin ollen odottavien asiakkaiden lukumäärän odotusarvo $E[X_{\mathrm{W}}]$ on yhtä kuin tilan 3 todennäköisyys π_3,

$$E[X_{\mathrm{W}}] = \pi_3 = \frac{5}{27} = 0.19$$

Jotta voisimme käyttää Littlen kaavaa keskimääräisen odotusajan laskemiseen, meidän on tiedettävä, millä intensiteetillä $\lambda_{\mathrm{carried}}$ systeemiin hyväksytään uusia asiakkaita. Tälle pätee

$$\lambda_{\mathrm{carried}} = \lambda(1 - B_{\mathrm{C}}),$$

missä B_{C} on todennäköisyys, että saapuva asiakas menetetään. Menetystodennäköisyys B_{C} voidaan laskea jakamalla keskimäärin yhdestä ryppäästä menetettyjen asiakkaiden lukumäärä $E[L]$ saapuvan ryppään keskikoolla $E[A]$. Saapuvan ryppään koko on systeemin tilasta riippumaton satunnaismuuttuja, jolla on odotusarvo

$$E[A] = 1\cdot P\{A=1\} + 2\cdot P\{A=2\} = 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1.50$$

Toisaalta taas Poisson-prosessin PASTA-ominaisuuden (L5/28) nojalla saapuva *rypäs* näkee systeemin tasapainossa. Näin ollen keskimäärin ryppäästä menetettävien asiakkaiden lukumäärä on

$$\begin{aligned} E[L] &= \pi_2\,(1\cdot P\{A=2\}) + \pi_3\,(1\cdot P\{A=1\} + 2\cdot P\{A=2\}) \\ &= \pi_2 P\{A=2\} + \pi_3 E[A] = \frac{6}{27}\cdot\frac{1}{2} + \frac{5}{27}\cdot\frac{3}{2} = \frac{7}{18} = 0.39 \end{aligned}$$

Näin ollen

$$B_{\mathrm{c}} = \frac{E[L]}{E[A]} = \frac{\frac{7}{18}}{\frac{3}{2}} = \frac{7}{27} = 0.26,$$

joten Littlen kaavan (L1/31) perusteella systeemiin hyväksyttyjen asiakkaiden keskimääräinen odotusaika on

$$E[W] = \frac{E[X_{\mathrm{w}}]}{\lambda_{\mathrm{carried}}} = \frac{E[X_{\mathrm{w}}]}{\lambda(1 - B_{\mathrm{c}})} = \frac{\frac{5}{27}}{1 - \frac{7}{27}} = \frac{1}{4} = 0.25 \text{ (aikayksikköä)}$$