TEKNILLINEN KORKEAKOULU — **Demonstraatiot**
Tietoliikenne- ja tietoverkkotekniikan laitos — **Luento 6**
S-38.1145 Liikenneteorian perusteet, Kevät 2008 — 1.2.2008

D6/1 Markov-prosessin $X(t)$ tila-avaruus on $\{0,1,2\}$. Tilasiirtymäintensiteetit q_{ij} on koottu siirtymämatriisiin $Q = (q_{ij} \mid i,j = 0,1,2)$, missä $q_{ii} = -q_i$ kaikilla i:

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & \mu & -(1+\mu) \end{pmatrix}$$

(a) Piirrä $X(t)$:n tilasiirtymäkaavio.

(b) Johda $X(t)$:n tasapainojakauma.

(c) Miten käy, jos μ on hyvin suuri tai hyvin pieni?

D6/2 Markov-prosessin $X(t)$ tila-avaruus on $\{0,1,2,3\}$. Tilasiirtymäintensiteetit q_{ij} on koottu siirtymämatriisiin $Q = (q_{ij} \mid i,j = 0,1,2,3)$, missä $q_{ii} = -q_i$ kaikilla i:

$$Q = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Piirrä $X(t)$:n tilasiirtymäkaavio.

(b) Johda $X(t)$:n tasapainojakauma.

(c) Onko prosessi kääntyvä, ts. toteutuvatko lokaalit tasapainoyhtälöt (LBE)?

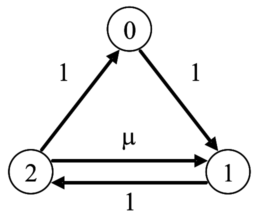
D6/3 Ns. Ehrenfestin mallia käytettiin aikanaan valaisemaan termodynamiikan toiseen pääsääntöön liittyvää näennäistä ristiriitaa. Malli voidaan kuvata seuraavasti. Suljettu järjestelmä muodostuu N:sta satunnaisesti liikkuvasta kaasumolekyylistä ja kahdesta säiliöstä, jotka on yhdistetty siten, että kukin molekyyli vaihtaa säiliötä riippumattomasti muista molekyyleistä vakiointensiteetillä λ. Merkitään $X(t)$:llä toisessa säiliössä olevien molekyylien lukumäärää. Kyseessä on selvästikin Markov-prosessi.

(a) Piirrä $X(t)$:n tilasiirtymäkaavio.

(b) Johda $X(t)$:n tasapainojakauma.

(c) Vertaa ehdollisia todennäköisyyksiä $P\{X(t) = N \mid X(0) = N/2\}$ ja $P\{X(t) = N/2 \mid X(0) = N\}$, kun N on parillinen ja t hyvin suuri.

D6/1 (a) Markov-prosessin $X(t)$ tilasiirtymäkaavio (L6/9) on esitetty kuvassa 1, vrt. L6/12.



Kuva 1: [D6/1] Tilasiirtymäkaavio.

(b) Kyseessä on selvästikin pelkistymätön Markov-prosessi (L6/10). Koska tila-avaruus on äärellinen, tasapainojakauma π on olemassa, ja se löytyy globaalien tasapaino-ehtojen ja normeerausehdon avulla (L6/11).
Kirjoitetaan ensin globaalit tasapainoehdot (GBE) tiloille 0 ja 1:

$$\pi_0 = \pi_2, \quad \pi_1 = \pi_0 + \pi_2\mu$$

Tästä ratkaistaan muut todennäköisyydet π_0:n funktiona:

$$\pi_1 = \pi_0(1+\mu), \quad \pi_2 = \pi_0$$

Puuttuva todennäköisyys π_0 selviää normeerausehdosta (N):

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = \pi_0(1 + (1+\mu) + 1) = \pi_0(3+\mu) = 1,$$

joten tasapainojakaumaksi tulee

$$\pi_0 = \frac{1}{3+\mu}, \quad \pi_1 = \frac{1+\mu}{3+\mu}, \quad \pi_2 = \frac{1}{3+\mu}$$

(c) Jos $\mu \to \infty$, niin prosessi on lopulta lähes aina tilassa 1 ($\pi_1 \to 1$ ja $\pi_i \to 0$ muilla i).
Jos taas $\mu \to 0$, niin prosessi hyppii lopulta tilasta toiseen järjestyksessä $0 \to 1 \to 2 \to 0$ eksponentiaalisin väliajoin intensiteetillä 1, joten tuloksena on tasajakauma ($\pi_i \to 1/3$ kaikilla i).

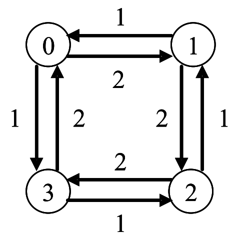
D6/2 (a) Markov-prosessin $X(t)$ tilasiirtymäkaavio (L6/9) on esitetty kuvassa 2.

(b) Kyseessä on selvästikin pelkistymätön Markov-prosessi (L6/10). Koska tila-avaruus on äärellinen, tasapainojakauma π on olemassa. Tilasiirtymäkaaviosta havaitaan, että kaikki tilat ovat symmetrisessä asemassa: ainoa mahdollinen jakauma on siis tasajakauma. Koska tiloja on 4 kpl, kunkin tilan tasapainotodennäköisyys on

$$\pi_0 = \pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \frac{1}{4}$$

Ratkaisun oikeellisuudesta voi vielä vakuuttautua toteamalla, että sekä globaalit tasapainoehdot (GBE)

$$3\pi_0 = 2\pi_3 + \pi_1, \quad 3\pi_1 = 2\pi_0 + \pi_2, \quad 3\pi_2 = 2\pi_1 + \pi_3, \quad 3\pi_3 = 2\pi_2 + \pi_0$$



Kuva 2: [D6/2] Tilasiirtymäkaavio.

että normeerausehto (N)

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

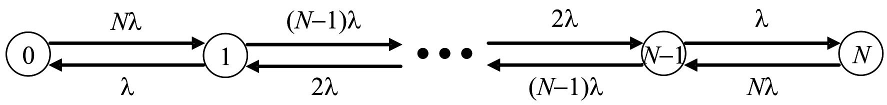
täyttyvät tälle jakaumalle.

(c) Kirjoitetaan esim. tilojen 0 ja 1 välinen lokaali tasapainoehto (LBE):

$$2\pi_0 = \pi_1$$

Prosessin tasapainojakauma, jolle $\pi_0 = \pi_1$, ei selvästikään toteuta ko. ehtoa. Prosessi ei siis ole kääntyvä.

D6/3 (a) Markov-prosessin $X(t)$ tilasiirtymäkaavio (L6/9) on esitetty kuvassa 3.



Kuva 3: [D6/3] Tilasiirtymäkaavio.

(b) Kyseessä on selvästikin pelkistymätön syntymä-kuolema-prosessi (L6/16). Koska tila-avaruus on äärellinen, tasapainojakauma π on olemassa, ja se löytyy lokaalien tasapainoehtojen ja normeerausehdon avulla (L6/17).

Kirjoitetaan ensin lokaalit tasapainoehdot (LBE) vierekkäisille tiloille $i-1$ ja i, missä $i = 1, \ldots, N$:

$$\pi_{i-1}(N-i+1)\lambda = \pi_i \, i\lambda$$

Tästä saadaan rekursiivisesti

$$\begin{aligned}
\pi_i &= \pi_{i-1}\,\frac{N-i+1}{i} \\
&= \pi_{i-2}\,\frac{(N-i+1)(N-i+2)}{i(i-1)} = \ldots \\
&= \pi_0\,\frac{(N-i+1)(N-i+2)\cdots N}{i(i-1)\cdots 1} \\
&= \pi_0\,\frac{N!}{i!(N-i)!} = \pi_0 \binom{N}{i}
\end{aligned}$$

Puuttuva todennäköisyys π_0 selviää normeerausehdosta (N):

$$\pi_0 + \pi_1 + \ldots + \pi_N = \pi_0 \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} = \pi_0\, 2^N = 1,$$

joten

$$\pi_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^N,$$

ja tasapainojakaumaksi tulee binomijakauma $\mathrm{Bin}(N, 1/2)$,

$$\pi_i = \binom{N}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^N, \qquad i = 0, 1, \ldots, N$$

(c) Kun t kasvaa rajatta, niin alkutilan merkitys häviää ja tilatodennäköisyydet lähestyvät tasapainojakaumaa. Näin ollen

$$P\{X(t) = N \mid X(0) = N/2\} \to \pi_N \quad \text{ja} \quad P\{X(t) = N/2 \mid X(0) = N\} \to \pi_{N/2}$$

Esimerkiksi tapauksessa $N = 50$,

$$\pi_N = 8.9 \cdot 10^{-16} \quad \text{ja} \quad \pi_{N/2} = 0.11.$$

Ääritilan (missä kaikki molekyylit ovat yhdessä astiassa toisen ollessa tyhjä) todennäköisyys tulee siis ajan myötä häviävän pieneksi, entropia systeemissä kasvaa, ja molekyylit hajaantuvat suurinpiirtein tasaisesti kahden säiliön välille.