D5/1 Pysäkin ohi kulkee busseja säännöllisesti 15 min välein. Takseja taas kulkee (busseista riippumattomasti) Poisson-prosessin mukaisesti keskimäärin 15 min välein. Saavut paikalle satunnaisella ajanhetkellä.

(a) Kuinka kauan joudut keskimäärin odottamaan bussia?

(b) Kuinka kauan joudut keskimäärin odottamaan taksia?

(c) Millä todennäköisyydellä joudut odottamaan pysäkillä yli 10 min, ennen kuin ensimmäinen taksi tai bussi kulkee ohi?

D5/2 Vastaa edellisen tehtävän kysymyksiin siinä tilanteessa, että saavutkin paikalle juuri edellisen bussin mentyä.

D5/3 Palvelimeen saapuu yhteyspyyntöjä Poisson-prosessin mukaisesti intensiteetillä λ. Jos palvelin ylikuormittuu, sen läpäisy romahtaa. Tämän tilanteen ennalta ehkäisemiseksi palvelimessa sovelletaan välistykseen (gapping) perustuvaa ruuhkanhallintaa: jokaisen hyväksytyn pyynnön jälkeen pidetään vakiomittainen tauko, pituudeltaan t, jolloin uusia palvelupyyntöjä ei oteta vastaan. Oletetaan, että tänä aikana saapuneet mutta hylätyt palvelupyynnöt eivät uusiudu.

(a) Montako palvelupyyntöä hyväksytään aikayksikköä kohti?

(b) Mikä on tämä hyväksyttyjen palvelupyyntöjen taajuus, kun T on joko hyvin pieni tai hyvin suuri?

D5/1 (a) Bussien väliajat ovat tässä esimerkissä vakiopituisia, 15 min. Jos tulet satunnaisella ajanhetkellä, aika seuraavan bussin tuloon, T_{b}, noudattaa tasajakaumaa (L4/41) välillä $(0, 15)$. Ko. jakauman keskiarvo (eli sinun keskimääräinen odotusaikasi) on selvästikin $15/2 = 7.5$ min.

(b) Taksien väliajat taas noudattavat eksponenttijakaumaa odotusarvolla 15 min. Eksponenttijakauman unohtavaisuusominaisuuden (L4/43) mukaan myös satunnaisesta hetkestä laskettu jäljellä oleva aika seuraavan taksin tuloon, T_{t}, noudattaa samaa eksponenttijakaumaa. Näin ollen aika seuraavan taksin tuloon (eli sinun odotusaikasi) on keskimäärin 15 min.

(c) Aika seuraavan kulkuneuvon tuloon on $T = \min\{T_{\mathrm{b}}, T_{\mathrm{t}}\}$. Koska T_{b} ja T_{t} ovat toisistaan riippumattomia ja

$$P\{T_{\mathrm{b}} > 10\} \overset{\text{L4/41}}{=} \frac{15-10}{15-0} = \frac{1}{3}, \quad P\{T_{\mathrm{t}} > 10\} \overset{\text{L4/42}}{=} e^{-\frac{10}{15}} = e^{-\frac{2}{3}},$$

saamme tehtävässä kysytyn todennäköisyyden kaavalla

$$P\{T > 10\} \overset{\text{L4/15}}{=} P\{T_{\mathrm{b}} > 10\} P\{T_{\mathrm{t}} > 10\} = \frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{2}{3}} \overset{\text{num.}}{=} 0.17$$

D5/2 (a) Jos tuletkin paikalle juuri edellisen bussin mentyä, niin aika seuraavan bussin tuloon T_{b}° on tietysti sama kuin mikä tahansa bussien väliaika, tässä esimerkissä siis vakioaika 15 min.

(b) Sen sijaan aika seuraavan taksin tuloon T_{t} noudattaa edelleen eksponenttijakaumaa odotusarvolla 15 min, koska bussit ja taksit kulkevat toisistaan riippumattomasti. Näin ollen aika seuraavan taksin tuloon on keskimäärin 15 min.

(c) Aika seuraavan kulkuneuvon tuloon on nyt $T = \min\{T_{\mathrm{b}}^{\circ}, T_{\mathrm{t}}\}$. Koska T_{b}° ja T_{t} ovat toisistaan riippumattomia ja $T_{\mathrm{b}}^{\circ} = 15 > 10$ todennäköisyydellä 1, saamme

$$P\{T > 10\} \overset{\text{L4/15}}{=} P\{T_{\mathrm{b}}^{\circ} > 10\} P\{T_{\mathrm{t}} > 10\} = 1 \cdot e^{-\frac{2}{3}} \overset{\text{num.}}{=} 0.51$$

D5/3 (a) Kahden hyväksytyn palvelupyynnön välinen aika on $t + I$, missä jäljellä oleva väliaika I noudattaa eksponenttijakauman unohtuvaisuusominaisuuden (L4/43) nojalla samaa eksponenttijakaumaa kuin täysi väliaikakin. Näin ollen hyväksyttyjen palvelupyyntöjen väli on keskimäärin $t + 1/\lambda$ ja tehtävässä kysytty taajuus tämän käänteisluku eli $1/(t + 1/\lambda)$.

(b) Kun t pienenee suhteessa $1/\lambda$:aan, taajuus lähestyy arvoa λ. Kun taas t kasvaa suhteessa $1/\lambda$:aan, taajuus lähestyy arvoa $1/t$, joka puolestaan kutistuu kohti nollaa.