D4/1 Olkoot X ja Y riippumattomia diskreettejä satunnaismuuttujia. Tarkastellaan satunnaismuuttujaa $Z = aX + bY$, missä $a, b \neq 0$.

(a) Määrää satunnaismuuttujan Z odotusarvo ja varianssi.

(b) Laske odotusarvo $E[Z]$ sekä todennäköisyys $P\{Z = 0\}$, kun $X \sim \text{Poisson}(3.0)$, $Y \sim \text{Poisson}(1.75)$ ja $a = b = 10$.

(b) Laske odotusarvo $E[Z]$ sekä todennäköisyys $P\{Z = 0\}$, kun $X \sim \text{Poisson}(3.0)$, $Y \sim \text{Poisson}(1.75)$ ja $a = b = 100$.

D4/2 Olkoot X ja Y diskreettejä satunnaismuuttujia, eivät kuitenkaan riippumattomia, vaan $Y = \min\{X, n\}$, missä n on annettu vakio. Tarkastellaan satunnaismuuttujaa $Z = aX + bY$, missä $a, b \neq 0$.

(a) Määrää satunnaismuuttujan Z odotusarvo.

(b) Laske odotusarvo $E[Z]$ sekä todennäköisyys $P\{Z = 0\}$, kun $X \sim \text{Poisson}(3.0)$, $a = b = 10$ ja $n = 2$.

D4/3 Oletetaan, että sulakkeen elinikä (kilotunneissa) $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Lisäksi tiedetään, että $P\{X \leq 10.0\} = 0.8$.

(a) Määrää jakauman parametri λ.

(b) Laske satunnaismuuttujan X odotusarvo.

(c) Mikä on eliniän mediaani, eli sellainen t, jolle $P\{X \leq t\} = 1/2$?

(d) Entä variaatiokerroin $C[X]$?

D4/4 Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa Pareto(β, b)-jakaumaa, $\beta, b > 0$. Kyseessä on jatkuva jakauma, jonka arvojoukko on $S_X = (0, \infty)$ ja kertymäfunktio

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{1}{1 + bx}\right)^{\beta}, \qquad x > 0.$$

Parametria β sanotaan muotoparametriksi ja parametria b skaalaparametriksi.

(a) Määrää jakauman odotusarvo $E[X]$ ja varianssi $D^2[X]$.

(b) Määrää jakauman variaatiokerroin $C[X]$, ja vertaa sitä Exp(λ)-jakauman variaatiokertoimeen.

D4/1 (a) Odotusarvolle pätee (L4/21):

$$E[Z] = E[aX + bY] \overset{\text{(ii)}}{=} E[aX] + E[bY] \overset{\text{(i)}}{=} aE[X] + bE[Y]$$

Jos X ja Y ovat riippumattomia (L4/20), silloin myös aX ja bY ovat riippumattomia, koska mille tahansa x ja y pätee

$$\begin{aligned} P\{aX = x, bY = y\} &= P\{X = x/a, Y = y/b\} \\ &= P\{X = x/a\}\{Y = y/b\} \\ &= P\{aX = x\}\{bY = y\} \end{aligned}$$

Näin ollen varianssille saadaan lauseke (L4/22):

$$D^2[Z] = D^2[aX + bY] \overset{\text{(ii)}}{=} D^2[aX] + D^2[bY] \overset{\text{(i)}}{=} a^2D^2[X] + b^2D^2[Y]$$

(b) Annetuilla oletuksilla $E[X] = 3.0$ ja $E[Y] = 1.75$, joten

$$E[Z] \overset{\text{(a)}}{=} aE[X] + bE[Y] = 10 \cdot 3.0 + 10 \cdot 1.75 = 47.5$$

Koska $aX, bY \geq 0$ ja $a, b > 0$, niin $Z = aX + bY = 0$ täsmälleen silloin, kun $X = 0$ ja $Y = 0$. Siispä

$$\begin{aligned} P\{Z = 0\} &= P\{X = 0, Y = 0\} \\ &\overset{\text{L4/20}}{=} P\{X = 0\}P\{Y = 0\} \\ &\overset{\text{L4/33}}{=} e^{-3.0}e^{-1.75} = e^{-4.75} \overset{\text{num.}}{=} 0.009 \end{aligned}$$

(c) Nyt odotusarvo kasvaa selvästi:

$$E[Z] \overset{\text{(a)}}{=} aE[X] + bE[Y] = 100 \cdot 3.0 + 100 \cdot 1.75 = 475.0,$$

mutta todennäköisyys $P\{Z = 0\}$ pysyy samana:

$$P\{Z = 0\} = P\{X = 0, Y = 0\} \overset{\text{(b)}}{=} e^{-4.75} \overset{\text{num.}}{=} 0.009$$

D4/2 (a) Kuten edellisessä tehtävässä, odotusarvolle pätee edelleen (L4/21):

$$E[Z] = E[aX + bY] \overset{\text{(ii)}}{=} E[aX] + E[bY] \overset{\text{(i)}}{=} aE[X] + bE[Y]$$

Odotusarvoa otettaessa summasta ei siis ole väliä, ovatko termien satunnaismuuttujat riippumattomia vai eivät.

(b) Annetuilla oletuksilla $E[X] = 3.0$ ja

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[\min\{X, 2\}] \\ &\overset{\text{L4/21}}{=} P\{X = 1\} + 2P\{X \geq 2\} = P\{X = 1\} + 2(1 - P\{X < 2\}) \\ &\overset{\text{L4/33}}{=} 3.0 \cdot e^{-3.0} + 2 \cdot (1 - e^{-3.0} - 3.0 \cdot e^{-3.0}) = 2 - 5 \cdot e^{-3.0} \overset{\text{num.}}{=} 1.75 \end{aligned}$$

Siispä

$$E[Z] = aE[X] + bE[Y] = 10 \cdot 3 + 10 \cdot 1.75 = 47.5$$

Kuten edellisessä tehtävässä, koska $aX, bY \geq 0$ ja $a, b > 0$, niin $Z = aX + bY = 0$ täsmälleen silloin, kun $X = 0$ ja $Y = 0$. Toisaalta nyt $Y = \min\{X, n\} = 0$ täsmälleen silloin, kun $X = 0$. Siispä

$$P\{Z = 0\} = P\{X = 0, Y = 0\} = P\{X = 0\} \overset{\text{L4/33}}{=} e^{-3.0} \overset{\text{num.}}{=} 0.050$$

D4/3 (a) Koska

$$P\{X \leq 10.0\} \overset{\text{L4/42}}{=} 1 - e^{-10.0 \cdot \lambda} = 0.8,$$

saamme intensiteetiksi

$$\lambda = -\frac{1}{10.0}\log(1 - 0.8) = -\frac{1}{10.0}\log(0.2) \overset{\text{num.}}{=} 0.16$$

(b) Odotusarvo:

$$E[X] \overset{\text{L4/42}}{=} \frac{1}{\lambda} = 6.21$$

(c) Koska mediaanille t pätee

$$P\{X \leq t\} \overset{\text{L4/42}}{=} 1 - e^{-\lambda t} = \frac{1}{2},$$

saamme mediaaniksi

$$t = -\frac{1}{\lambda}\log(1 - \frac{1}{2}) = 10.0 \cdot \frac{\log(0.5)}{\log(0.2)} \overset{\text{num.}}{=} 4.31$$

(d) Eksponenttijakauman variaatiokerroin on parametrista λ riippumatta aina sama:

$$C[X] \overset{\text{L4/24}}{=} \frac{D[X]}{E[X]} \overset{\text{L4/24}}{=} \frac{\sqrt{D^2[X]}}{E[X]} \overset{\text{L4/42}}{=} \frac{1/\lambda}{1/\lambda} = 1.$$

D4/4 (a) Määrätään ensin Pareto-jakauman tiheysfunktio:

$$f_X(x) \overset{\text{L4/37}}{=} F_X'(x) = b\beta\left(\frac{1}{1+bx}\right)^{\beta+1}.$$

Odotusarvo:

$$\begin{aligned} E[X] &\overset{\text{L4/39}}{=} \int_0^\infty x\, f_X(x)\, dx \\ &= \int_0^\infty x\, b\beta\left(\frac{1}{1+bx}\right)^{\beta+1} dx \\ &\overset{\text{os.int.}}{=} \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+bx}\right)^{\beta} dx = \frac{1}{b(\beta-1)} \end{aligned}$$

Odotusarvo on äärellinen vain tapauksessa $\beta > 1$.

Toinen momentti:

$$\begin{aligned}
E[X^2] &\overset{\text{L4/39}}{=} \int_0^\infty x^2 \, f_X(x)\, dx \\
&= \int_0^\infty x^2 \, b\beta \left(\frac{1}{1+bx}\right)^{\beta+1} dx \\
&\overset{\text{os.int.}}{=} \frac{2}{b(\beta-1)} \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+bx}\right)^{\beta-1} dx = \frac{2}{b^2(\beta-1)(\beta-2)}
\end{aligned}$$

Toinen momentti on äärellinen vain tapauksessa $\beta > 2$.
Varianssi:

$$\begin{aligned}
D^2[X] &\overset{\text{L4/22}}{=} E[X^2] - E[X]^2 \\
&= \frac{2}{b^2(\beta-1)(\beta-2)} - \frac{1}{b^2(\beta-1)^2} = \frac{\beta}{b^2(\beta-1)^2(\beta-2)}
\end{aligned}$$

Varianssi on äärellinen vain tapauksessa $\beta > 2$.

(b) Variaatiokerroin (kun $\beta > 2$):

$$C[X] \overset{\text{L4/24}}{=} \frac{D[X]}{E[X]} \overset{\text{L4/24}}{=} \frac{\sqrt{D^2[X]}}{E[X]} \overset{\text{(a)}}{=} \sqrt{\frac{\beta}{\beta-2}} > 1$$

Siis Pareto-jakauman variaatiokerroin riippuu vain muotoparametrista β. Lisäksi se on aina eksponenttijakauman variaatiokerrointa 1 suurempi.