STOKASTISET PROSESSIT

Peruskäsitteitä

Usein tarkasteltava järjestelmä kehittyy ajan mukana ja meitä kiinnostaa sen dynaaminen, yleensä satunnaisuutta sisältävä käyttäytyminen.

- jonon pituus
- ulkolämpötila
- kurssin S-38.143 läpäisseiden opiskelijoiden määrä eri vuosina
- verkossa olevien datapakettien määrä eri hetkinä

Stokastinen prosessi X_t (tai $X(t)$) on perhe satunnaismuuttujia, joita parametri t (yleensä aika) indeksoi.

Muodollisesti stokastinen prosessi on kuvaus otosavaruudesta $\mathcal{S}$ parametrin t funktiolle. Jokaiseen $\mathcal{S}$:n alkioon e liittyy funktio $X_t(e)$.

- Annetulla arvolla e $X_t(e)$ on ajan funktio (“uurnasta vedetään arpalippu e, johon on piirretty ajan funktion kuvaaja”)
- Annetulla arvolla t $X_t(e)$ on satunnaismuuttuja
- Annetuilla arvoilla e ja t $X_t(e)$ on luku

Annetulla arvolla e saatua (arvottua) t:n funktiota $X_t(e)$ kutsutaan satunnaisprosessin realisaatioksi (trajektori, otospolku).

Tila-avaruus: X_t:n arvojen joukko

Parametriavaruus: t:n arvojen joukko

Satunnaisprosesseja voidaan luokitella sen mukaan, ovatko nämä avaruudet jatkuvia vai diskreettejä:

	Tila-avaruus	
Parametriav.	Diskreetti	Jatkuva
Diskreetti	*	**
Jatkuva	* * *	* * **

Parametriavaruuden tyypin mukaan puhutaan diskreettiaikaisista ja jatkuva-aikaisista satunnaisprosesseista.

Diskreettiaikaisista satunnaisprosesseista käytetään myös nimitystä satunnaisjono.

Stokastisten prosessien osalta ollaan kiinnostuneita seuraavan kaltaisista suureista:

- Stationaarinen jakauma: määrittelee todennäköisyydet, joilla X_t saa arvoja tila-avaruuden eri osajoukoissa, kun $t \to \infty$ (olettaen, että ko. todennäköisyydet lähenevät tiettyä rajaa)
- Eri ajanhetkiin s ja t liittyvien satunnaismuuttujien X_s ja X_t välinen relaatio (esim. kovarianssi tai korrelaatio
- Osumatodennäköisyys: todennäköisyys, että tietty tila-avaruuden piste tai osajoukko milloinkaan saavutetaan
- Ensiohituksen aika (first passage time): ajanhetki jona satunnaisprosessi ensimmäisen kerran saavuttaa annetun tilan tai tilajoukon lähtien jostakin annetusta alkutilasta

Stokastisen prosessin X_t n:nnen kertaluvun statistiikka määrää yhteisjakauman

$$F_{X_{t_1},\ldots,X_{t_n}}(x_1,\ldots,x_n) = \mathrm{P}\{X_{t_1} \le x_1,\ldots,X_{t_n} \le x_n\}$$

kaikille mahdollisilla parametrijoukoilla $\{t_1,\ldots,t_n\}$.

Stokastisen prosessin X_t täydellinen karakterisointi edellyttää kaikkien kertalukujen statistiikkojen tuntemista.

1. kertaluvun statistiikkaa:

Stationaarinen jakauma

$$F(x) = \lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\{X_t \le x\}$$

Odotusarvo (hetkellä t)

$$\bar{X}_t = \mathrm{E}[X_t]$$

2. kertaluvun statistiikkaa:

Kovarianssi (autokovarianssi)

$$R_{t,s} = \mathrm{E}[(X_t - \bar{X}_t)(X_s - \bar{X}_s)]$$

Stationaarinen prosessi

Kaikkien kertalukujen statistiikat ovat invariantteja ajan siirron suhteen

$$F_{X_{t_1+\tau},\ldots,X_{t_n+\tau}}(x_1,\ldots,x_n) = F_{X_{t_1},\ldots,X_{t_n}}(x_1,\ldots,x_n) \qquad \forall n,\ \forall t_1,\ldots,t_n$$

Laajassa mielessä stationaarinen prosessi

$$\bar{X}_t = \text{vakio}, \quad R_{t+\tau,s+\tau} = R_{t,s} \quad \forall\tau \qquad \text{1. ja 2. kertaluvun statistiikat siirtoinvariantteja}$$

Stationaaristen lisäysten prosessi

$$X_{t+\tau} - X_t \quad \text{on stationaarinen prosessi} \quad \forall\tau$$

Riippumattomien lisäysten prosessi

$$X_{t_2} - X_{t_1},\ldots,X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \quad \text{ovat riippumattomia} \quad \forall t_1 < t_2 < \cdots < t_n$$

Ergodinen prosessi

Prosessin koko statistiikka voidaan määrätä yhdestä (äärettömän pitkästä) realisaatiosta.

Markov-prosessi

Markov-prosessiksi kutsutaan stokastista prosessia, jolla on ns. Markovin ominaisuus:

$$\boxed{\mathrm{P}\{X_{t_n} \le x_n \,|\, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \ldots X_{t_1} = x_1\} = \mathrm{P}\{X_{t_n} \le x_n \,|\, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}\}} \quad \forall n,\ \forall t_1 < \cdots < t_n$$

- Markov-prosessin tuleva kehitys ehdollistettuna prosessin nykyiseen ($X_{t_{n-1}}$) ja sitä edeltäneisiin tiloihin riippuu vain prosessin nykyisestä tilasta (ei siitä, miten tähän on tultu).
- Nykyinen tila sisältää kaiken tiedon (yhteenvedon menneisyydestä), mitä tarvitaan prosessin tulevan (stokastisen) käyttäytymisen määräämiseen.
- Annettuna prosessin tila jollakin hetkellä sen tulevaisuus ja menneisyys ovat toisistaan riippumattomia.

Esim. Riippumattomien lisäysten prosessi on aina Markov-prosessi.

$$X_{t_n} = X_{t_{n-1}} + \underbrace{(X_{t_n} - X_{t_{n-1}})}_{\substack{\text{lisäys on riippumaton kaikista} \\ \text{aikaisemmista lisäyksistä, jotka} \\ \text{ovat johtaneet tilaan } X_{t_{n-1}}}}$$

Markov-ketju

Termi Markov-ketju liitetään kirjallisuudessa vaihtelevasti joko siihen, että Markov-prosessi on diskreettiaikainen tai että se on on diskreettitilainen.

Jatkossa termin käyttö rajoittuu etupäässä tapaukseen, jossa prosessi on sekä diskreetti-aikainen että diskreettitilainen.

- Yleisyyden kärsimättä voimme merkitä diskreettejä ajanhetkiä kokonaisluvuilla.
  - Markovin ketju on siis prosessi $X_n,\ n = 0, 1, \ldots$.
- Samoin merkitsemme systeemin tiloja kokonaisluvuilla $X_n = 0, 1, \ldots$ (tilajoukko voi olla joko ääretön tai äärellinen).

Seuraavassa oletamme lisäksi, että prosessi on aikahomogeeninen.

Tällaisen prosessin käyttäytymisen määräävät (yhden askeleen) siirtymätodennäköisyydet (siirtymä tilasta i tilaan j):

$$\boxed{p_{i,j} = \mathrm{P}\{X_n = j \,|\, X_{n-1} = i\}}$$

aikahomogeenisuus: siirtymätodennäköisyys ei riipu n:stä

Polun todennäköisyys

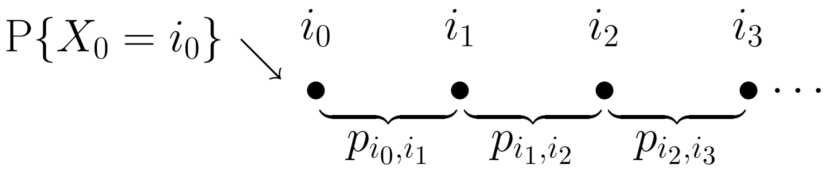
Polun $i_0, i_1, \ldots, i_n$ todennäköisyys on

$$\mathrm{P}\{X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n\} = \mathrm{P}\{X_0 = i_0\}\, p_{i_0,i_1}\, p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{n-1},i_n}$$

<u>Todistus</u>

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\{X_0 = i_0, X_1 = i_1\} &= \underbrace{\mathrm{P}\{X_1 = i_1 \,|\, X_0 = i_0\}}_{p_{i_0,i_1}} \mathrm{P}\{X_0 = i_0\} \\
\mathrm{P}\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2\} &= \underbrace{\mathrm{P}\{X_2 = i_2 \,|\, X_1 = i_1, X_0 = i_0\}}_{p_{i_1,i_2}} \underbrace{\mathrm{P}\{X_1 = i_1, X_0 = i_0\}}_{p_{i_0,i_1}\mathrm{P}\{X_0 = i_0\}} \\
&= \mathrm{P}\{X_0 = i_0\}\, p_{i_0,i_1}\, p_{i_1,i_2}
\end{aligned}$$

Vastaavalla tavalla todistusta voidaan jatkaa pidempiin sekvensseihin.



Markovin ketjun siirtymämatriisi

Siirtymätodennäköisyyksistä voidaan muodostaa siirtymämatriisi $\mathbf{P} = (p_{i,j})$

$$\begin{array}{cl} \text{lopputila} \rightarrow & \\ \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & p_{0,2} & \cdots \\ p_{1,0} & p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} & \downarrow \text{alkutila} \end{array}$$

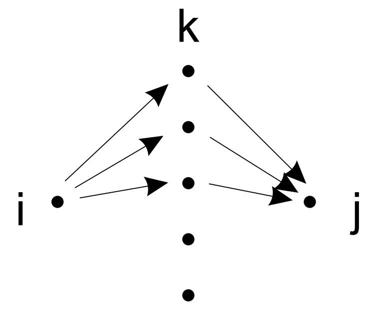
- Vaakariveillä on siirtymätodennäköisyydet tilasta i muihin tiloihin.
  - koska aina siirrytään johonkin tilaan, näiden todennäköisyyksien summa on 1
- Matriisia, jonka elementit ovat ei-negatiivisia lukuja ja jonka rivisummat ovat ykkösiä, sanotaan stokastiseksi matriisiksi.
- Voidaan helposti osoittaa, että kahden stokastisen matriisin tulo on stokastinen matriisi.

Usean askeleen siirtymämatriisi

Todennäköisyys, että systeemi lähdettyään tilasta i on kahden siirtymäaskeleen jälkeen tilassa j, on

$$\sum_k p_{i,k} p_{k,j}$$

(otetaan huomioon kaikki polut välitilan k kautta).



Tämä on selvästi matriisin $\mathbf{P}^2$ elementti $\{i, j\}$.

Vastaavasti nähdään, että n:n askeleen siirtymämatriisi on $\mathbf{P}^n$.

Merkitään tämän elementtejä $p_{i,j}^{(n)}$:llä (yläindeksi viittaa siihen, että kyseessä on n:n askeleen siirtymämatriisi). Koska pätee $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}^m \cdot \mathbf{P}^{n-m}$ $(0 \le m \le n)$, voidaan kirjoittaa komponenttimuodossa

$$\boxed{p_{i,j}^{(n)} = \sum_k p_{i,k}^{(m)} p_{k,j}^{(n-m)}}$$

Chapmanin ja Kolmogorovin yhtälö

Kysymyksessä on kokonaistodennäköisyyden kaava, jossa siirtyminen n:llä askeleella tilasta i tilaan j on ehdollistettu siihen, että m:n askeleen jälkeen ollaan tilassa k.

Tilatodennäköisyydet

Merkitään

$$\boxed{\pi_i^{(n)} = \mathrm{P}\{X_n = i\}}$$ todennäköisyys, että prosessi on tilassa i hetkellä n

Muodostetaan hetkeen n liittyvistä tilatodennäköisyyksistä tilatodennäköisyysvektori

$$\boxed{\boldsymbol{\pi}^{(n)} = (\pi_0^{(n)}, \pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \ldots)}$$

Kokonaistodennäköisyyden kaavan perusteella pätee

$$\mathrm{P}\{X_1 = i\} = \sum_k \mathrm{P}\{X_1 = i \,|\, X_0 = k\}\mathrm{P}\{X_0 = k\}$$

eli $\pi_i^{(1)} = \sum_k \pi_k^{(0)} p_{k,i}$ ja vektorimuodossa $\boldsymbol{\pi}^{(1)} = \boldsymbol{\pi}^{(0)}\mathbf{P}$

Koska prosessi on markovinen ja $\boldsymbol{\pi}^{(1)}$ edustaa alkutodennäköisyyksiä seuraavassa askeleessa,

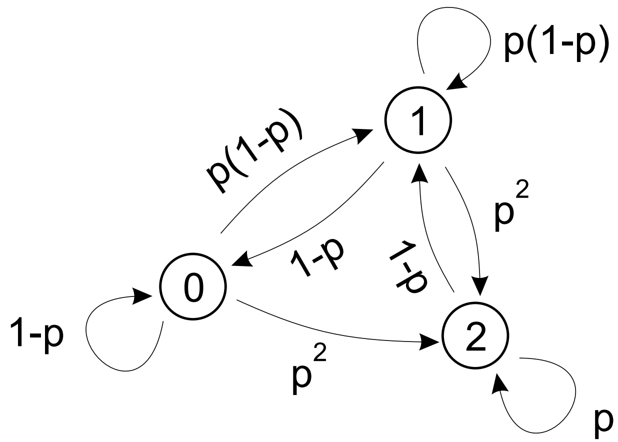
$\boldsymbol{\pi}^{(2)} = \boldsymbol{\pi}^{(1)}\mathbf{P}$ ja yleisesti $\boldsymbol{\pi}^{(n)} = \boldsymbol{\pi}^{(n-1)}\mathbf{P}$

josta seuraa rekursiivisesti

$$\boxed{\boldsymbol{\pi}^{(n)} = \boldsymbol{\pi}^{(0)}\mathbf{P}^n}$$ (Huom. $\mathbf{P}^n$ on n:n askeleen siirtymämatriisi.)

Esimerkki

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-p & p(1-p) & p^2 \\ 1-p & p(1-p) & p^2 \\ 0 & 1-p & p \end{pmatrix} \qquad p = 1/3$$



$$\mathbf{P} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6666 & 0.2222 & 0.1111 \\ 0.6666 & 0.2222 & 0.1111 \\ 0 & 0.6666 & 0.3333 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^2 = \frac{1}{9^2}\begin{pmatrix} 48 & 22 & 11 \\ 48 & 22 & 11 \\ 36 & 30 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5926 & 0.2716 & 0.1358 \\ 0.5926 & 0.2716 & 0.1358 \\ 0.4444 & 0.3704 & 0.1852 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^3 = \frac{1}{9^3}\begin{pmatrix} 420 & 206 & 103 \\ 420 & 206 & 103 \\ 396 & 222 & 111 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5761 & 0.2826 & 0.1413 \\ 0.5761 & 0.2826 & 0.1413 \\ 0.5432 & 0.3045 & 0.1523 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

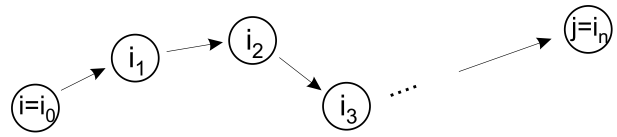
$$\mathbf{P}^8 = \begin{pmatrix} 0.5714 & 0.2857 & 0.1429 \\ 0.5714 & 0.2857 & 0.1429 \\ 0.5714 & 0.2857 & 0.1429 \end{pmatrix}$$

Kun lähdetään alkutilasta i, niin lopputilan todennäköisyysjakauma näkyy riviltä i.

Kahdeksan askeleen jälkeen lopputilajakauma on neljällä numerolla riippumaton alkutilasta: "prosessi unohtaa alkutilan".

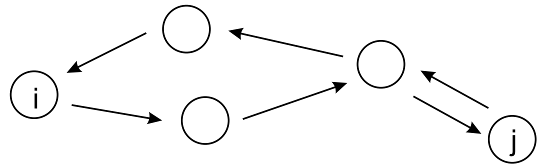
Markov-prosessin tilojen luokittelu

Tila i johtaa tilaan j (merkitään $i \to j$), jos on olemassa polku $i_0 = i, i_1, \ldots, i_n = j$ siten, että kaikki tilasiirtymätodennäköisyydet ovat positiivisia, $p_{i_k,i_{k+1}} > 0,\ k = 0, \ldots, n-1$.



Tällöin $(\mathbf{P}^n)_{i,j} > 0$.

Tilat i ja j kommunikoivat (merkitään $i \leftrightarrow j$), jos $i \to j$ ja $j \to i$.



Kommunikoivuus on ekvivalenssirelaatio: tilat voidaan jakaa luokkiin siten, että

- kunkin luokan sisällä kaikki tilat kommunikoivat keskenään
- mitkään kaksi eri luokista otettua tilaa eivät kommunikoi keskenään

Relaation $\leftrightarrow$ määräämiä ekvivalenssiluokkia kutsutaan pelkistymättömiksi (irreducible) luokiksi

Markov-ketju on pelkistymätön, jos sen tila-avaruus muodostaa yhden pelkistymättömän luokan (kaikki tilat kommunikoivat keskenään).

Tilojen luokittelu (jatkoa)

Tilajoukko on suljettu, jos mikään sen tiloista ei johda mihinkään joukon ulkopuolisista tiloista.

Tilaa, joka yksinään muodostaa suljetun joukon, kutsutaan absorboivaksi tilaksi

- absorboivalla tilalla pätee $p_{i,i} = 1$
- tilaan voidaan tulla muista tiloista, mutta siitä ei siirrytä pois

Jokainen tila on joko transientti tai palautuva tila.

- Tila i on transientti, mikäli todennäköisyys palata tilaan i on < 1.
  Ts. on äärellinen todennäköisyys, ettei tilaan milloinkaan palata.
- Tila i on palautuva (recurrent), mikäli todennäköisyys palata tilaan i on $= 1$.
  Ts. varmuudella tilaan palataan joskus.

Palautuvat tilat erotellaan vielä paluuajan $T_{i,i}$[1] odotusarvon mukaan:

positiivisesti palautuva (positive recurrent)	nollapalautuva (null recurrent)
paluuajan odotusarvo $< \infty$	paluuajan odotusarvo $= \infty$

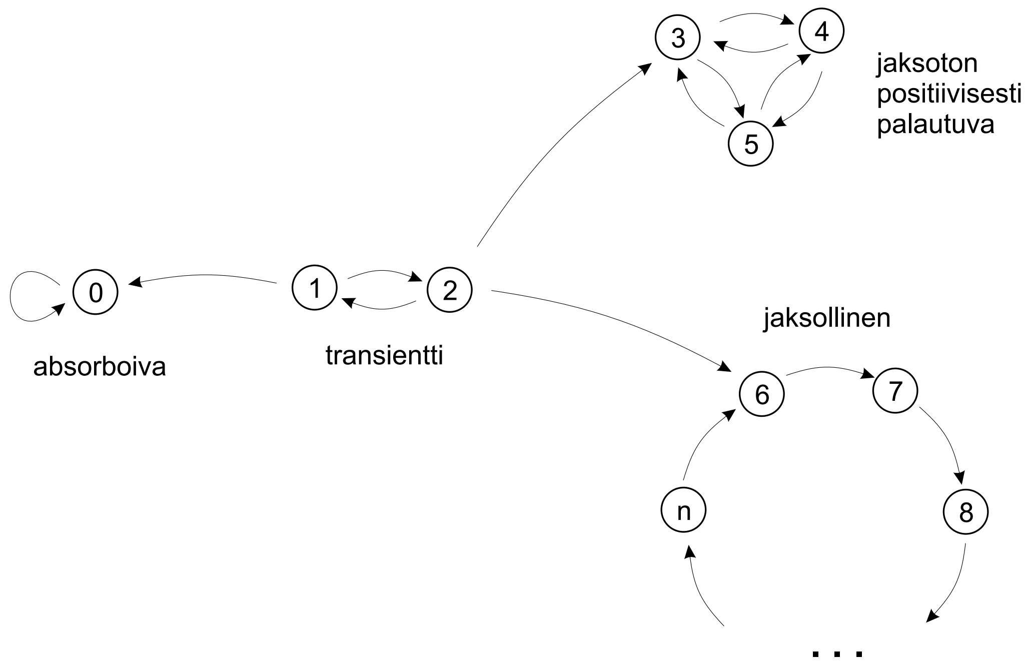
[1] Tilan i paluuaika $T_{i,i}$ on askelten lukumäärä, joka kuluu tilasta i lähdön jälkeen paluuseen tilaan i.

Tilojen luokittelu (jatkoa)

Tyyppi	Käyntien lkm.	$\mathrm{E}[T_{i,i}]$
Transientti	$< \infty$	∞
Nollapalautuva	∞	∞
Posit. palautuva	∞	$< \infty$

Jos tilan i paluuaika voi olla vain jonkin (kokonais)luvun $d > 1$ monikerta, tilaa i sanotaan jaksolliseksi. Muutoin tila on jaksoton.

Jaksoton positiivisesti palautuva tila on ergodinen
Markov-ketju on ergodinen, jos sen kaikki tilat ovat ergodisia.

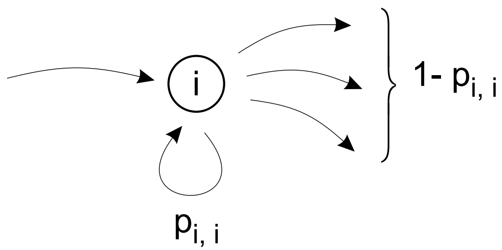


Tilojen luokittelu (jatkoa)

Lause: Pelkistymättömällä Markov-ketjulla joko

- kaikki tilat ovat transientteja
- kaikki tilat ovat nollapalautuvia
- kaikki tilat ovat positiivisesti palautuvia

Huomioita tilan elinajasta ja paluuajasta



Askelten lukumäärä, jonka järjestelmä peräkkäin viipyy tilassa i on geometrisesti jakautunut

$$\sim \text{Geom}(1 - p_{i,i})$$

koska tilasta poistuminen tapahtuu tn:llä $1 - p_{i,i}$.

Jokaisen tilassa i käynnin jälkeen paluuaika $T_{i,i}$ takaisin tilaan i on riippumaton muiden käyntien jälkeisistä paluuajoista (seuraa Markovisuudesta).

Merkitään $\bar{T}_i = \mathrm{E}[T_{i,i}]$

$$\bar{T}_i = \begin{cases} \infty & \text{jos tila on transientti tai nollasti palautuva} \\ < \infty & \text{jos tila on positiivisesti palautuva} \end{cases}$$

Kolmogorovin teoreema

Pelkistymättömällä ja jaksottomalla Markov-ketjulla on aina olemassa rajatodennäköisyydet

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \pi_j^{(n)} = 1/\bar{T}_j$$

ja nämä ovat alkutilasta riippumattomat.

Lisäksi pätee joko

i) ketjun kaikki tilat ovat transientteja tai kaikki tilat ovat nollapalautuvia, jolloin $\pi_j = 0,\ \forall j$,

tai

ii) ketjun kaikki tilat ovat positiivisesti palautuvia, jolloin tasapainotilan todennäköisyydet saadaan yhtälöiden

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{P} \\[1ex] \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{e}^{\mathrm{T}} = 1 \end{array}}$$

eli

$$\pi_j = \sum_i \pi_i\, p_{i,j} \quad \text{ja} \quad \sum_j \pi_j = 1$$

($\mathbf{e}$ on vaakavektori, jonka kaikki komponentit ovat ykkösiä, ja $\mathbf{e}^{\mathrm{T}}$ vastaava pystyvektori)

yksikäsitteisinä ratkaisuina.

Huomioita tasapainojakaumasta

Jos rajatodennäköisyydet (vektorin komponentit) $\boldsymbol{\pi}$ ovat olemassa, ne välttämättä toteuttavat yhtälön $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$, sillä

$$\boldsymbol{\pi} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\pi}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\pi}^{(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\pi}^{(n)} \cdot \mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$$

Yhtälö $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$ voidaan lausua myös muodossa: $\boldsymbol{\pi}$ on matriisin $\mathbf{P}$ ominaisarvoon 1 liittyvä (vasemmanpuoleinen) ominaisvektori (tai matriisin $(\mathbf{P} - \mathbf{I})$ ominaisarvoon 0 liittyvä ominaisvektori).

π_j kertoo, minkä osan ajasta (askeleista) systeemi viettää tilassa j.

Rajajakaumaa π_j kutsutaan stationaariseksi jakaumaksi tai tasapainotilan todennäköisyydeksi

Huom. Tasapainotila ei tarkoita sitä, etteikö systeemissä tapahtuisi mitään, vaan että systeemin alkutilaan liittyvä tieto on “unohtunut” tai “huuhtoutunut pois” järjestelmän stokastisen kehityksen tuloksena.

Globaali tasapainoehto

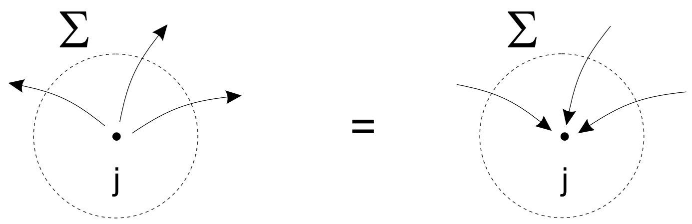
Ehtoa $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$ eli $\pi_j = \sum_i \pi_i\, p_{i,j},\ \forall j$, kutsutaan usein (globaaliksi) tasapainoehdoksi.

Koska $\sum_i p_{j,i} = 1$ (aina siirrytään johonkin tilaan), voidaan kirjoittaa

$$\underbrace{\sum_i \pi_j\, p_{j,i}}_{\text{tn. että ollaan tilassa } j \text{ ja siirrytään siitä johonkin muuhun tilaan}} = \underbrace{\sum_i \pi_i\, p_{i,j}}_{\text{tn. että ollaan jossain muussa tilassa ja siirrytään siitä tilaan } j}$$

Yksi yhtälö kutakin tilaa j kohti.

Todennäköisyysvirtojen tasapaino: tilasta j lähdetään yhtä usein kuin sinne tullaan.



- Jos tasapainoehtojen tiedetään olevan voimassa tila-avaruuden kaikissa muissa tiloissa paitsi yhdessä tilassa, ovat ne automaattisesti voimassa myös kyseisessä tilassa (todennäköisyysvirtojen “säilymislain” perusteella)

- – tasapainoyhtälöt ovat lineaarisesti riippuvia
  (⇒ homogeeniyhtälöllä $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$ on nollasta poikkeava ratkaisu)
  – homogeeniyhtälön ratkaisu on vakiotekijää vaille määrätty
  – vakiotekijän kiinnittämiseksi tarvitaan normiehto $\sum_j \pi_j = 1$

Esimerkki. Palataan aikaisempaan esimerkkiin (yleisellä arvolla p).

$$(\,\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2\,) = (\,\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2\,)\begin{pmatrix} 1-p & p(1-p) & p^2 \\ 1-p & p(1-p) & p^2 \\ 0 & 1-p & p \end{pmatrix}$$

Kirjoitetaan kaksi ensimmäistä yhtälöä (vp. ja op. vektorien kahta ensimmäistä komponenttia koskevat yhtäsuuruusehdot)

$$\begin{aligned} \pi_0 &= (1-p)\pi_0 + (1-p)\pi_1 & \Rightarrow \quad & \pi_0 = \tfrac{1-p}{p}\,\pi_1 \\ \pi_1 &= p(1-p)\pi_0 + p(1-p)\pi_1 + (1-p)\pi_2 \\ &= (1-p)^2\pi_1 + p(1-p)\pi_1 + (1-p)\pi_2 \\ &= (1-p)\pi_1 + (1-p)\pi_2 & \Rightarrow \quad & \pi_1 = \tfrac{1-p}{p}\,\pi_2 \qquad \Rightarrow \quad \pi_0 = \left(\tfrac{1-p}{p}\right)^2 \pi_2 \end{aligned}$$

eli

$$\boldsymbol{\pi} = \left(\,\left(\tfrac{1-p}{p}\right)^2 \quad \tfrac{1-p}{p} \quad 1\,\right)\pi_2\ .$$

Soveltamalla normiehtoa $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$, saadaan

$$\boldsymbol{\pi} = \left(\,\tfrac{(1-p)^2}{1-p(1-p)} \quad \tfrac{p(1-p)}{1-p(1-p)} \quad \tfrac{p^2}{1-p(1-p)}\,\right) \qquad \text{Arvolla } p = \tfrac{1}{3}: \qquad \boldsymbol{\pi} = (\,0.5714 \quad 0.2857 \quad 0.1429\,)$$

Tasapainoyhtälön ratkaisemisesta

Kuten edellä on tullut ilmi tasapainoyhtälöiden ratkaiseminen tapahtuu yleisesti seuraavasti (oletetaan äärellinen tila-avaruus, jossa on n tilaa):

- Kirjoitetaan tasapainoyhtälö kaikille muille tiloille paitsi yhdelle ($n-1$ yhtälöä)
  - nämä yhtälöt määräävät tasapainotodennäköisyyksien suhteet
  - ratkaisu tulee määrätyksi vakiotekijää vaille
- Viimeisen tasapainoyhtälön (joka toteutuu automaattisesti) asemesta kirjoitetaan normiehto $\Sigma_j \pi_j = 1$.

Tietokoneella ratkaistaessa on usein mukavampi käyttää seuraavaa menettelyä (yleensä siirtymätodennäköisyysmatriisi $\mathbf{P}$ on konstruoitu kokonaisuudessaan):

Kirjoitetaan normiehdosta $\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{e}^{\mathrm{T}} = 1$ kopioita n kpl:

$\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{e}$ missä $\mathbf{E}$ on $n \times n$-matriisi, jonka kaikki alkiot ovat ykkösiä, $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Lasketaan tämä yhtälö yhteen tasapainoyhtälön $\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}$ kanssa $\Rightarrow \boldsymbol{\pi} \cdot (\mathbf{P} + \mathbf{E} - \mathbf{I}) = \mathbf{e}$

$$\boxed{\boldsymbol{\pi} = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{P} + \mathbf{E} - \mathbf{I})^{-1}}$$

Epähomogeeniyhtälöllä on yksikäsitteinen ratkaisu. Ratkaisu toteuttaa automaattisesti sekä tasapainoyhtälön että normiehdon.