$M/G/1$-jono

$$\begin{cases} M \text{ (memoryless):} & \text{Poisson-saapumisprosessi, intensiteetti } \lambda \\ G \text{ (general):} & \text{yleinen palveluaikajakautuma, keskiarvo } \bar{S} = 1/\mu \\ 1: & \text{yksi palvelin, kuorma } \rho = \lambda\bar{S} \text{ (stabiilissa jonossa on } \rho < 1) \end{cases}$$

Järjestelmässä olevien asiakkaiden lukumäärä $N(t)$ ei muodosta enää Markov-prosessia.

- Todennäköisyys (aikayksikköä kohden) järjestelmän siirtymiselle tilasta $\{N = n\}$ tilaan $\{N = n - 1\}$ eli asiakkaan poistumiselle riippuu myös siitä ajasta, jonka palveltavana oleva asiakas on jo palvelua saanut;
  - tätä informaatiota ei sisälly muuttujaan $N(t)$
  - ainoastaan eksponentiaalisen palveluaikajakauman tapauksessa jo saadun palvelun kestolla ei ole merkitystä (muistittomuus)

Tästä huolimatta $M/G/1$-jonon keskimääräinen jononpituus, odotusaika ja viipymäaika voidaan selvittää. Pollaczek-Khinchinin kaavoina tunnetut tulokset johdetaan seuraavassa.

Osoittautuu, että myös asianomaisten suureiden jakaumat voidaan selvittää. Upotetun Markovin ketjun tarkasteluun perustuva johto esitetään keskiarvokaavojen käsittelyn jälkeen.

Pollaczek-Khinchinin keskiarvokaava

Helpointa on lähteä liikkeelle odotusajan W odotusarvosta. W on aika, jonka asiakas joutuu odottamaan palveluun pääsyä (aika "odotushuoneessa" eli varsinaisessa jonossa).

$$\mathrm{E}[W] = \underbrace{\underbrace{\mathrm{E}[N_q]}_{\substack{\text{odottavien asi-}\\ \text{akkaiden lkm}}} \cdot \underbrace{\mathrm{E}[S]}_{\substack{\text{keskimääräinen}\\ \text{palveluaika}}}}_{\substack{\text{edessä olevien odottavien asiakkaiden}\\ \text{palveluun keskimäärin kuluva aika}}} + \underbrace{\mathrm{E}[R]}_{\substack{\text{tekemätön työ}\\ \text{palvelimessa}}} \qquad (R = \text{residuaalinen palveluaika})$$

- Suure R on palvelimessa olevan asiakkaan jäljelläoleva palveluaika (tekemätön työ ilmaistuna työn purkamiseen kuluvana aikana).
  Jos palvelin on tyhjä (eli systeemi on tyhjä), on $R = 0$.
- Saapuvan asiakkaan odotusajan laskemiseksi tarvitaan N_q:n (odottavien asiakkaiden lkm) asiakkaan saapumishetkellä.
- Poisson-prosessin PASTA-ominaisuuden perusteella saapuvan asiakkaan näkemät jakaumat ovat samat kuin jakaumat mielivaltaisella ajanhetkellä.

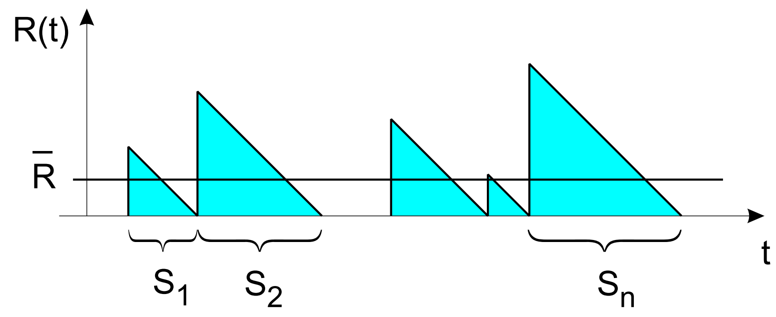
Avainhavainto on, että Littlen tuloksen nojalla keskimääräinen odotusjonon pituus $\mathrm{E}[N_q]$ voidaan lausua odotusajan avulla (ottamalla odotushuone mustaksi laatikoksi)

$$\mathrm{E}[N_q] = \lambda \mathrm{E}[W] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{E}[W] = \frac{\mathrm{E}[R]}{1-\rho}}$$

Tehtäväksi jää määrätä $\mathrm{E}[R]$.
$\rho = \lambda \mathrm{E}[S]$

Pollaczek-Khinchinin keskiarvokaava (jatkoa)

Jäljelläolevan palveluajan odotusarvo voidaan päätellä samanlaisen graafisen tarkastelun avulla, jota käytettiin liftarin paradoksin selityksessä. Kuvaaja esittää nyt palvelimessa olevan tekemättömän työn $R(t)$ kehitystä ajan funktiona.



Tarkastellaan pitkää ajanjaksoa t. Odotusarvo on sahalaitakäyrän keskiarvo ja voidaan laskea jakamalla kolmioiden pinta-alojen summa jakson pituudella.

- Nyt kolmioiden välissä voi olla tyhjiä jaksoja (jono tyhjä).
- Kolmioiden lukumäärä n määräytyy saapumisnopeuden λ perusteella; odotusarvo λt.

$$\mathrm{E}[R] = \frac{1}{t}\int_0^t R(t')dt' = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}S_i^2 = \underbrace{\frac{n}{t}}_{\to\lambda}\cdot\underbrace{\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}S_i^2}_{\to\frac{1}{2}\mathrm{E}[S^2]}$$

$$\boxed{\mathrm{E}[W] = \frac{\lambda \mathrm{E}[S^2]}{2(1-\rho)}}$$

Pollaczek-Khinchinin keskiarvokaava odotusajalle

Pollaczek-Khinchinin keskiarvokaava (jatkoa)

Odotusajasta seuraa välittömästi kaava keskimääräiselle viipymäajalle systeemissä

$$\mathrm{E}[T] = \underbrace{\mathrm{E}[S]}_{\substack{\text{asiakkaan omaan}\\ \text{palveluun kuluva aika}}} + \mathrm{E}[W]$$

Keskimääräiset ajat

$$\boxed{\begin{cases} \mathrm{E}[W] = \dfrac{\lambda \mathrm{E}[S^2]}{2(1-\rho)} = \dfrac{1+C_v^2}{2} \cdot \dfrac{\rho}{1-\rho} \cdot \mathrm{E}[S] \\[2ex] \mathrm{E}[T] = \mathrm{E}[S] + \dfrac{\lambda \mathrm{E}[S^2]}{2(1-\rho)} = \left(1 + \dfrac{1+C_v^2}{2} \cdot \dfrac{\rho}{1-\rho}\right) \cdot \mathrm{E}[S] \end{cases}}$$

Neliöllinen variaatiokerroin C_v^2

$$\begin{aligned} C_v^2 &= \mathrm{V}[S]/\mathrm{E}[S]^2 \\ \mathrm{E}[S^2] &= \mathrm{V}[S] + \mathrm{E}[S]^2 \\ &= (1 + C_v^2) \cdot \mathrm{E}[S]^2 \end{aligned}$$

Soveltamalla Littlen tulosta saadaan vastaavat lukumääräkaavat.

Keskimääräiset lukumäärät

$$\boxed{\begin{cases} \mathrm{E}[N_q] = \lambda \mathrm{E}[W] = \dfrac{\lambda^2 \mathrm{E}[S^2]}{2(1-\rho)} = \dfrac{1+C_v^2}{2} \cdot \dfrac{\rho^2}{1-\rho} \\[2ex] \mathrm{E}[N] = \lambda \mathrm{E}[T] = \lambda \mathrm{E}[S] + \dfrac{\lambda^2 \mathrm{E}[S^2]}{2(1-\rho)} = \rho + \dfrac{1+C_v^2}{2} \cdot \dfrac{\rho^2}{1-\rho} \end{cases}}$$

Huomioita PK-keskiarvokaavoista

- Keskiarvosuureet riippuvat vain palveluaikajakauman keskiarvosta $\mathrm{E}[S]$ ja varianssista $\mathrm{V}[S]$ mutta eivät muista momenteista.
- Kaikki keskiarvot kasvavat lineaarisesti varianssin mukana.
- Stokastisuus, 'sekasorto', lisää jonotusaikoja ja jononpituutta.
- Kaavat muistuttavat $M/M/1$-jonon vastaavia kaavoja; ainoa ero on kaavoissa esiintyvä ylimääräinen tekijä $(1 + C_v^2)/2$.

PK-keskiarvokaavat $M/M/1$- ja $M/D/1$-jonoille

<u>$M/M/1$-jono</u>

Eksponenttijakauman tapauksessa pätee

$$\mathrm{V}[S] = \mathrm{E}[S]^2 \quad \Rightarrow \quad C_v^2 = 1$$

$$\boxed{\begin{cases} \mathrm{E}[N] &= \rho + \dfrac{\rho^2}{1-\rho} &= \dfrac{\rho}{1-\rho} \\ \mathrm{E}[T] &= \left(1 + \dfrac{\rho}{1-\rho}\right) \cdot \mathrm{E}[S] &= \dfrac{1}{1-\rho} \cdot \mathrm{E}[S] \end{cases}}$$

Tavalliset $M/M/1$-jonon kaavat

<u>$M/D/1$-jono</u>

Vakiopalveluajan tapauksessa pätee

$$\mathrm{V}[S] = 0 \quad \Rightarrow \quad C_v^2 = 0$$

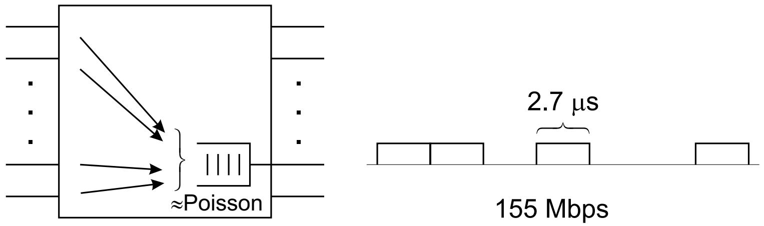
$$\boxed{\begin{cases} \mathrm{E}[N] &= \rho + \dfrac{1}{2}\dfrac{\rho^2}{1-\rho} \\ \mathrm{E}[T] &= \left(1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{\rho}{1-\rho}\right) \cdot \mathrm{E}[S] \end{cases}}$$

Tekijä 1/2 “odotushuoneosuuksissa”

Esimerkki.

ATM-multiplekserin ulostulopuskurin jonoa voidaan likimääräisesti kuvata $M/D/1$-jononona.

Vakiopalveluaika tarkoittaa nyt sitä, että ATM-solu on vakiomittainen (53 oktettia) ja sen lähetysaika linkille on vakio.



Jos linkin nopeudeksi oletetaan 155 Mbit/s, niin lähetysaika on $S = 53 \cdot 8/155\ \mu s = 2.7 \mu s$.

Kysytään, mikä on puskurin keskimääräinen miehitys (mukaanlukien kulloinkin lähetettävänä oleva solu) ja solun puskurissa kokema keskiviive, jos linkillä kulkeva informaatiovirta on keskimäärin 124 Mbit/s?

Linkin kuormitusaste on $\rho = 124/155 = 0.8$.

Tällöin

$$\begin{cases} \mathrm{E}[N] & = & 0.8 + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{0.8^2}{1-0.8} = 2.4 \\ \mathrm{E}[T] & = & \left(1 + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{0.8}{1-0.8}\right) 2.7\,\mu\mathrm{s} = 8.1\,\mu\mathrm{s} \end{cases}$$

$M/G/1$-järjestelmän jononpituusjakauma

Jononpituus N_t $M/G/1$-jonossa ei muodosta Markovin prosessia.

- Pelkkä lukumäärä ei kerro, millä todennäköisyydellä palveltavana oleva asiakas poistuu systeemistä, vaan ko. todennäköisyys riippuu myös jo saadun palvelun kestosta.

Kuten edellä nähtiin, keskimääräisen jononpituuden kaava voitiin johtaa helposti. Myös jononpituusjakauma voidaan selvittää. Tähän on kaksikin eri tietä:

1. Ensimmäinen perustuu havaintoon, että järjestelmässä oleva tekemätön työ X_t (tai virtuaalinen odotusaika V_t) muodostaa Markovin prosessin. Markovisuus on valitun satunnaisprosessin, ei systeemin, ominaisuus.
   - X_t:n käyttäytymistä voidaan karakterisoida seuraavasti: kun saapumisia ei tapahdu X_t pienenee vakionopeudella C (aina kun $X_t > 0$). Lisäksi aikayksikköä kohden on olemassa todennäköisyys λ uuden asiakkaan saapumiselle, joka tuo mukanaan annetun jakauman mukaisen työmäärän. Karakterisoinnissa ei tarvita tietoa X_t:n historiasta.
   - Teknisenä hankaluutena on, että X_t on jatkuva-arvoinen satunnaisprosessi. Ongelma ei ole kuitenkaan merkittävä.
2. Toinen perustuu havaintoon, että on mahdollista löytää upotettu Markovin ketju, josta haluttu jakauma voidaan selvittää. Seuraavassa käytetään tätä upotetun Markovin ketjun menetelmää.

Upotettu Markovin ketju

Upotetun Markovin ketjun muodostaa poistuvan asiakkaan jälkeensä jättämä jono (asiakkaiden lukumäärä systeemissä). Se että tämä todella on Markovin ketju, perustellaan hiukan myöhemmin.

Merkitään

$$\begin{cases} N_-^* & = \quad \text{saapuvan asiakkaan näkemä jononpituus (jononpituus juuri ennen saapumista)} \\ N_+^* & = \quad \text{poistuvan asiakkaan jälkeensä jättämä jononpituus} \\ N & = \quad \text{jononpituus mielivaltaisella hetkellä} \end{cases}$$

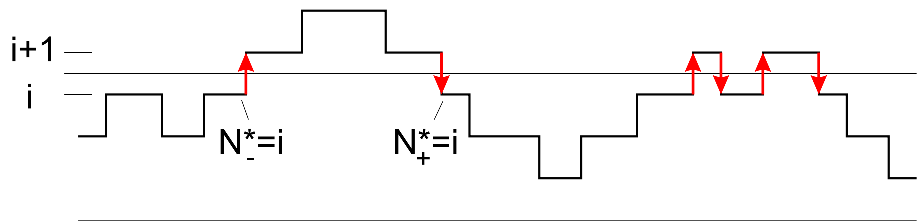
Poisson-saapumisten PASTA-ominaisuuden perusteella pätee $\boxed{N_-^* \sim N}$

Lisäksi mille tahansa järjestelmälle, jossa saapumisia ja poistumisia tapahtuu yksitellen, pätee

$$\boxed{N_+^* \sim N_-^*}$$

(ns. tasonylitysominaisuus)

Todistus:



Tapahtumat $\{N_-^* = i\}$ ja $\{N_+^* = i\}$ esiintyvät pareittain.

$$\mathrm{P}\{N_-^* = i\} = \mathrm{P}\{N_+^* = i\} \quad \Rightarrow \quad N_-^* \sim N_+^*$$

Upotettu Markovin ketju (jatkoa)

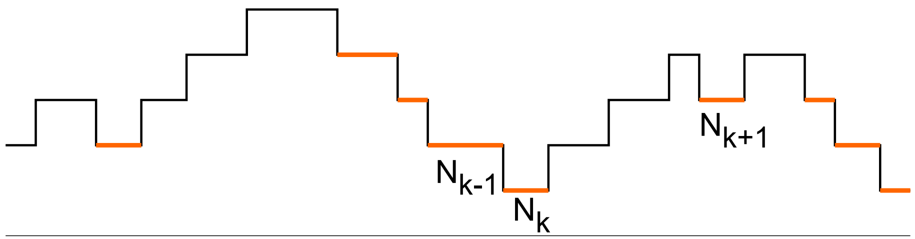
On osoitettu $N_+^* \sim N_-^*$ ja $N_-^* \sim N$. $\Rightarrow$ $\boxed{N_+^* \sim N}$

Jononpituuden N jakauman selvittämiseksi mielivaltaisella hetkellä riittää selvittää jakauma asiakkaiden poistumisten jälkeisinä ajanhetkinä.

Seuraavassa keskitytään tarkastelemaan Markovin ketjua N_+^*, jota seuraavassa lyhyyden vuoksi merkitään N:llä.

Erityisesti merkitään

$$\begin{cases} N_k = & \text{jononpituus asiakkaan } k \text{ poistumisen jälkeen} \\ V_k = & \text{asiakkaan } k \text{ palveluaikana saapuneiden uusien asiakkaiden lukumäärä.} \end{cases}$$



Upotettu Markovin ketju (jatkoa)

Väite: Diskreettiaikainen prosessi N_k muodostaa Markovin ketjun (ei kuitenkaan SK-prosessia).

Todistus: Kun N_k on annettu, N_{k+1} voidaan kirjoittaa tämän ja (N_k:sta ja erityisesti sen historiasta) riippumattoman satunnaismuuttujan V_{k+1} avulla:

$$N_{k+1} = \begin{cases} N_k - 1 + V_{k+1}, & N_k \geq 1 \\ V_{k+1}, & N_k = 0 \qquad\qquad (= N_k + V_{k+1}) \end{cases}$$

- Jos $N_k \geq 1$, niin asiakkaan k poistuessa asiakas $k+1$ on jonossa (yksi N_k:sta asiakkaasta) ja siirtyy palveluun.

  Asiakkaan $k+1$ poistuessa jono vähenee yhdellä. Tällä välillä (asiakkaan $k+1$ palveluaikana) on saapunut V_{k+1} uutta asiakasta.

- Jos $N_k = 0$, jono jää tyhjäksi asiakkaan k jälkeen. Asiakkaan $k+1$ saapuessa jononpituus kasvaa yhdellä ja vastaavasti vähenee yhdellä asiakkaan $k+1$ poistuessa. Jonoon jäävät ne, jotka ovat saapuneet asiakkaan $k+1$ palvelun aikana.

- Koska eri asiakkaiden palveluajat ovat riippumattomia ja saapumiset poissonisia, ovat saapumisten määrät V_k toisistaan riippumattomia. Lisäksi V_{k+1} on riippumaton jononpituusprosessista ennen asiakkaan k poistumista eli N_k:sta ja sitä edeltäneistä arvoista.

N_{k+1}:n stokastinen käyttäytyminen riippuu N_k:sta muttei aikaisemmista arvoista. MOT.

Upotettu Markovin ketju (jatkoa)

Merkitään $\hat{N}_k = (N_k - 1)^+ = \begin{cases} N_k - 1, & N_k \geq 1 \\ N_k \ (= 0), & N_k = 0 \end{cases}$

Tällöin on $\boxed{N_{k+1} = \hat{N}_k + V_{k+1}}$

Hypyt ylöspäin voivat olla mielivaltaisen suuria. Alaspäin tullaan askel kerrallaan.

- Tasapainotilanteessa (kun alkutilainformaatio on unohtunut) satunnaismuuttujat $N_k,\ N_{k+1}, \ldots$ ovat samoinjakautuneita.
- Niin myös satunnaismuuttujat $\hat{N}_k,\ \hat{N}_{k+1}, \ldots$ ovat keskenään samoinjakautuneita.
- Satunnaismuuttujat $V_k,\ V_{k+1}, \ldots$ ovat jo alunperin samoinjakautuneita.

Merkitään vastaavia geneerisiä tasapainojakaumaa noudattavia satunnaismuuttujia ilman indeksejä, joten

$$\boxed{N = \hat{N} + V}$$

Koska V ja $\hat{N}$ ovat riippumattomia, generoiville funktioille pätee

$$\boxed{\mathcal{G}_N(z) = \mathcal{G}_{\hat{N}}(z) \cdot \mathcal{G}_V(z)}$$

Tehtävänä on nyt laskea $\mathcal{G}_{\hat{N}}(z)$ ja $\mathcal{G}_V(z)$.

$\hat{N}$:n generoivan funktion palautus N:n generoivaan funktioon

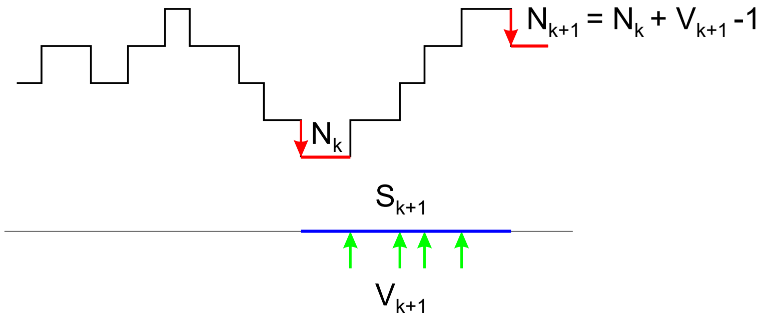
$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{\hat{N}}(z) &= \mathrm{E}[z^{\hat{N}}] \\
&= z^0 \cdot \underbrace{\mathrm{P}\{\hat{N}=0\}}_{\mathrm{P}\{N=0\}+\mathrm{P}\{N=1\}} + \sum_{i=1}^{\infty} z^i \underbrace{\mathrm{P}\{\hat{N}=i\}}_{\mathrm{P}\{N=i+1\}} \\
&= \mathrm{P}\{N=0\} + \frac{1}{z}\sum_{i=1}^{\infty} z^i \mathrm{P}\{N=i\} \\
&= \underbrace{\mathrm{P}\{N=0\}}_{1-\rho}(1-\frac{1}{z}) + \frac{1}{z}\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} z^i \mathrm{P}\{N=i\}}_{\mathcal{G}_N(z)}
\end{aligned}$$

On saatu tulos

$$\boxed{\mathcal{G}_{\hat{N}}(z) = \frac{\mathcal{G}_N(z) - (1-\rho)(1-z)}{z}} \qquad \text{missä} \quad \rho = \lambda \mathrm{E}[S]$$

Upotettu Markovin ketju (jatkoa)

Case $N_k > 0$

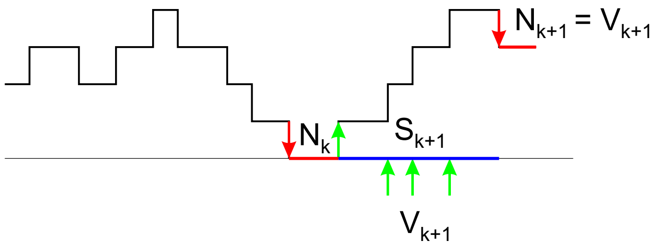


$$N_{k+1} = \hat{N}_k + V_{k+1}$$

$$\hat{N}_k = (N_k - 1)^+ = \begin{cases} N_k - 1, & N_k \geq 1 \\ N_k \ (= 0), & N_k = 0 \end{cases}$$

i	0	1	2	3	4
$\mathrm{P}\{N = i\}$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
	$\downarrow$	$\swarrow$	$\swarrow$	$\swarrow$	$\swarrow$
$\mathrm{P}\{\hat{N} = i\}$	$p_0 + p_1$	p_2	p_3	p_4	p_5

Case $N_k = 0$



$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\hat{N}}(z) &= \frac{1}{z}(\mathcal{G}_N(z) - p_0) + p_0 \\ &= \frac{\mathcal{G}_N(z) - (1-\rho)(1-z)}{z} \end{aligned}$$

Palveluaikana tulevien Poisson-saapumisten lukumäärä

Olkoon X mielivaltainen satunnaismuuttuja (aikaväli).

Halutaan selvittää Poisson-prosessista (intensiteetti λ) väliin X tulevien saapumisten lukumäärän K jakauma ja erityisesti sen generoiva funktio $\mathcal{G}_K(z)$.

$$\mathcal{G}_K(z) = \mathrm{E}[z^K] = \mathrm{E}[\,\underbrace{\mathrm{E}\left[z^K \,|\, X\right]}_{K\sim\mathrm{Poisson}(\lambda X)}\,] = \mathrm{E}[e^{-(1-z)\lambda X}] = X^*((1-z)\lambda) \qquad | \quad X^*(s) = \mathrm{E}[e^{-sX}]$$

Yleisesti $\boxed{\mathcal{G}_K(z) = X^*((1-z)\lambda)}$ Erityisesti $\boxed{\mathcal{G}_V(z) = S^*((1-z)\lambda)}$

Tulos voidaan johtaa myös alkeellisemmin

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_K(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} z^i \mathrm{P}\{K=i\} = \sum_{i=0}^{\infty} z^i \int_0^\infty \overbrace{\mathrm{P}\{K=i\,|\,X=x\}}^{\frac{(\lambda x)^i}{i!}e^{-\lambda x}} f_X(x)dx \\
&= \int_0^\infty f_X(x) e^{-\lambda x} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda x z)^i}{i!} dx = \int_0^\infty f_X(x) e^{-\lambda x} e^{\lambda x z} dx = \int_0^\infty f_X(x) e^{-(1-z)\lambda x} dx \\
&= X^*((1-z)\lambda)
\end{aligned}$$

Palveluaikana tulevien Poisson-saapumisten lukumäärä (jatkoa)

Tulos voidaan tulkita kollektiivisten merkkien avulla:

- Kollektiivisten merkkien menetelmän mukaan tulkittuna $\mathcal{G}_K(z)$ tarkoittaa todennäköisyyttä, ettei yksikään välille X tulleesta K:sta saapumisesta ole merkitty, kun kukin saapuminen merkitään muista riippumatta todennäköisyydellä $(1-z)$.
- Merkityt saapumiset muodostavat satunnaispoiminnalla saadun Poisson-prosessin, jonka intensiteetti on $(1-z)\lambda$.
- Laplace-muunnoksen tulkinta kollektiivisten merkkien avulla: $X^*(s)$ on todennäköisyys, ettei välille X tule yhtään saapumista Poisson-prosessista, jonka intensiteetti on s:

$$X^*(s) = \mathrm{E}[e^{-sX}] = \mathrm{E}[\mathrm{P}\{0 \text{ saapumista välillä } X \,|\, X\}] = \mathrm{P}\{0 \text{ saapumista välillä } X\}$$

- Kun merkintäprosessin intensiteetti on $(1-z)\lambda$, merkittömyystodennäköisyys on vastaavasti $X^*((1-z)\lambda)$.

Pollaczek-Khinchinin muunnoskaava jononpituudelle

Kootaan tulokset yhteen

$$\mathcal{G}_N(z) = \mathcal{G}_{\hat{N}}(z) \cdot \mathcal{G}_V(z) = \frac{\mathcal{G}_N(z) - (1-\rho)(1-z)}{z} \cdot S^*((1-z)\lambda)$$

Tästä voidaan ratkaista $\mathcal{G}_N(z)$

$$\boxed{\mathcal{G}_N(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)}{S^*((1-z)\lambda) - z} \cdot S^*((1-z)\lambda) = \frac{(1-\rho)(1-z)}{1 - z/S^*((1-z)\lambda)}}$$

Esimerkki. $M/M/1$-jono

$$S \sim \text{Exp}(\mu) \quad \Rightarrow \quad S^*(s) = \frac{\mu}{s+\mu}$$

$$S^*((1-z)\lambda) = \frac{\mu}{(1-z)\lambda + \mu} = \frac{1}{(1-z)\rho + 1} \qquad \Big| \quad \rho = \lambda/\mu$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_N(z) &= \frac{(1-\rho)(1-z)}{1 - z((1-z)\rho + 1)} = \frac{(1-\rho)(1-z)}{(1-z)(1-\rho z)} = \frac{1-\rho}{1-\rho z} \\ &= (1-\rho)(1 + (\rho z) + (\rho z)^2 + \cdots) \qquad \text{(generoi } M/M/1\text{-jonon jakauman)} \end{aligned}$$

$M/G/1$-jono: viipymisajan T jakauma

Edellä johdettiin kaava asiakkaan jälkeensä jättämän jonon N (täydellisempi merkintä N_+^*) jakaumalle, joka todettiin samaksi kuin jononpituuden jakauma mielivaltaisella ajanhetkellä.

Tuloksen perusteella voidaan päätellä enemmänkin, nimittäin asiakkaan systeemissä viettämän kokonaisajan eli viipymisajan T jakauma (odotusarvolle johdettiin jo aikaisemmin Pollaczek-Khinchinin keskiarvokaava).

Avainhavainto päättelyssä on, että asiakkaan jälkeensä jättämä jono N muodostuu niistä asiakkaista, jotka ovat saapuneet asiakkaan systeemissäolon aikana.

Jälleen voidaan soveltaa yleistä tulosta satunnaisessa aikavälissä tapahtuvien Poisson-prosessin saapumisten lukumäärän generoivalle funktiolle

$$\boxed{\mathcal{G}_N(z) = T^*((1-z)\lambda)} \qquad \text{missä } T^*(\cdot) \text{ on systeemissäoloajan Laplace-muunnos.}$$

Huomautus: Laskemalla derivaatta z:n suhteen pisteessä $z = 1$ saadaan

$$\mathrm{E}[N] = \mathcal{G}_N'(1) = -\lambda \underbrace{T^{*\prime}(0)}_{-\mathrm{E}[T]} = \lambda \mathrm{E}[T]$$

Näin pitääkin olla Littlen tuloksen perusteella.

$M/G/1$-jono: viipymisajan jakauma (jatkoa)

On saatu yhtälö

$$T^*((1-z)\lambda) = \frac{(1-\rho)(1-z)}{S^*((1-z)\lambda) - z} S^*((1-z)\lambda)$$

Tässä z on vapaa muuttuja. Merkitään $s = (1-z)\lambda$ eli $z = 1 - s/\lambda$, jolloin

$$\boxed{T^*(s) = \frac{(1-\rho)s}{s - \lambda + \lambda S^*(s)} S^*(s)}$$

Pollaczek-Khinchinin muunnoskaava viipymisajalle

Esimerkki. $M/M/1$-jono

$$S \sim \text{Exp}(\mu) \quad \Rightarrow \quad S^*(s) = \frac{\mu}{s+\mu}$$

$$T^*(s) = \frac{(1-\rho)s}{s - \lambda + \lambda \dfrac{\mu}{s+\mu}} \frac{\mu}{s+\mu} = \frac{(1-\rho)s}{s - \lambda \dfrac{s}{s+\mu}} \frac{\mu}{s+\mu} = \frac{\mu - \lambda}{s + (\mu - \lambda)}$$

$\Rightarrow \quad T \sim \text{Exp}(\mu - \lambda)$, kuten jo aikaisemmin on todettu.

$M/G/1$-jono: odotusajan W jakauma

Yleisesti pätee $T = \underbrace{W}_{\text{odotus}} + \underbrace{S}_{\text{palvelu}}$

Koska W ja S ovat riippumattomia, Laplace-muunnoksille pätee

$$T^*(s) = W^*(s) \cdot S^*(s)$$

jolloin $T^*(s)$:n kaavasta voidaan identifioida

$$\boxed{W^*(s) = \frac{(1-\rho)s}{s - \lambda + \lambda S^*(s)}}$$ Pollaczek-Khinchinin muunnoskaava odotusajalle

Lauseke voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$W^*(s) = \frac{1-\rho}{1 - \rho \dfrac{1 - S^*(s)}{s\mathrm{E}[S]}} \qquad | \quad \rho = \lambda \mathrm{E}[S]$$

Merkitään nyt R:llä palvelimen jäljelläolevaa palveluaikaa ehdolla, että palvelimessa on asiakas.
Voidaan osoittaa (harjoitustehtävä), että R:n tiheysfunktio on

$$f_R(t) = \frac{1 - F_S(t)}{\mathrm{E}[S]} \quad \Rightarrow \quad R^*(s) = \frac{1 - S^*(s)}{s\mathrm{E}[S]} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W^*(s) = \frac{1-\rho}{1 - \rho R^*(s)}}$$

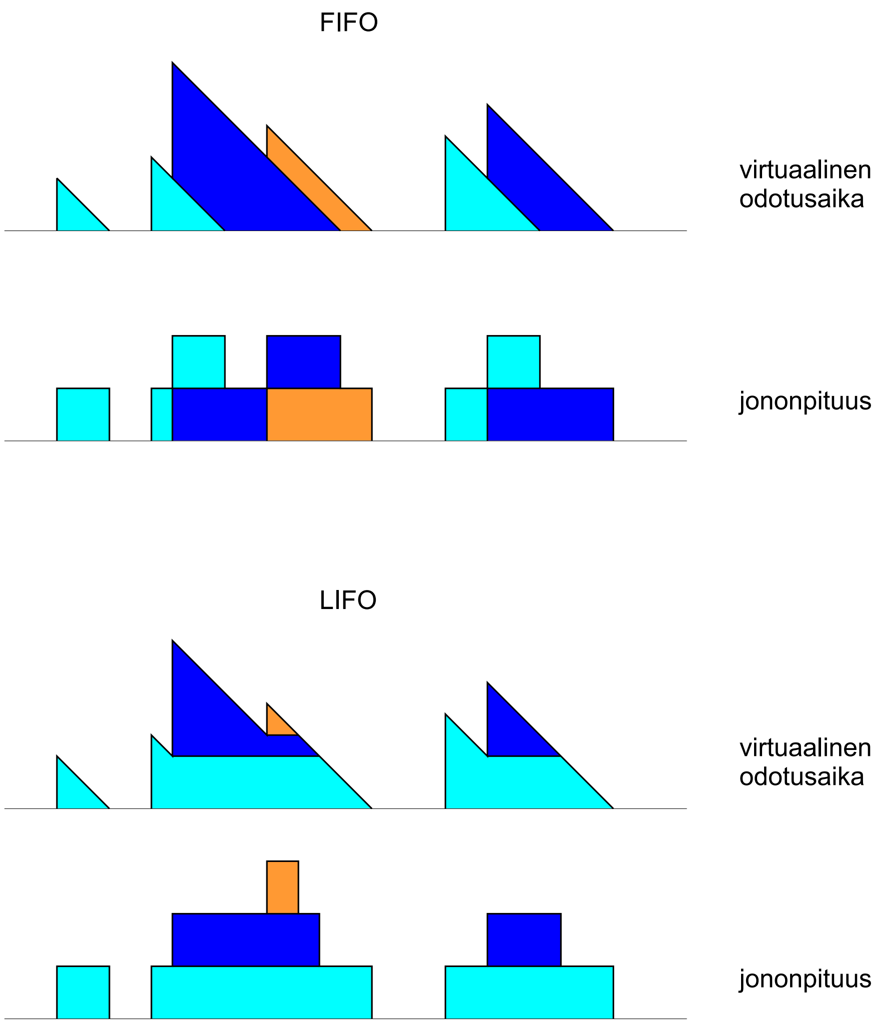
$W^*(s)$-kaavan tulkinta

$$W^*(s) = \frac{1-\rho}{1-\rho R^*(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\rho)\rho^n R^*(s)^n$$

- Asiakkaan kokema odotusaika W on Poisson-saapumisten PASTA-ominaisuuden perusteella jakautunut kuten virtuaalinen odotusaika (tekemätön työ aikayksiköissä ilmaistuna) mielivaltaisella ajanhetkellä.
- Virtuaalinen odotusaika jonossa on riippumaton vuoronjakomenetelmästä (perustellaan myöhemmin) ja on tavallisessa FIFO-jonossa sama kuin esim. PS-jonossa (Processor Sharing).
- $M/M/1$-PS-jonon jononpituusjakauma $\pi_n = (1-\rho)\rho^n$ on palveluajan jakaumasta riippumaton eli pätee myös $M/G/1$-jonolle (FIFO-jonon tapauksessa näin ei ole asian laita).
- PS-jonossa mielivaltaisella hetkellä oleva tekemätön työ muodostuu eri asiakkaiden jäljelläolevista palveluajoista. Voidaan osoittaa, että ehdollistettuna jonossa olevien asiakkaiden lukumäärään n, näiden asiakkaiden jäljelläolevat palveluajat toisistaan riippumatta jakautuvat kuten R. Kyseisten asiakkaiden yhteenlasketulla jäljelläolevalla palveluajalla on Laplace-muunnos $R^*(s)^n$.
- Kokonaistodennäköisyyden kaavan mukaan ylläoleva kaava antaa PS-jonon (ja siis myös FIFO-jonon) virtuaalisen odotusajan Laplace-muunnoksen.

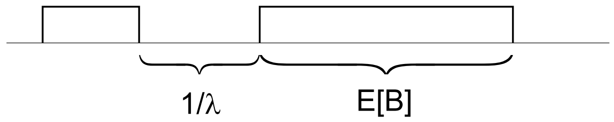
Virtuaalinen odotusaika (tekemätön työ) jonossa on palvelujärjestyksestä riippumaton

- Jos vuoronjako on ns. työn säilyttävä (work conserving) eli jonoa puretaan aina kun tekemätöntä työtä on varastossa, ei kiirejakson pituuden kannalta ole väliä, mikä asiakkaiden palvelujärjestys on eli mille jonossa olevalle asiakkaalle palvelua kulloinkin annetaan; kokonaistyö on "anonyymiä työtä".
- Vuoronjako vaikuttaa N_t:hen mutta ei X_t:hen tai V_t:hen.



$M/G/1$-jonon kiirejakso: odotusarvo

Palvelin on vuorotellen käynnissä ja jouten. Kiirejaksolla tarkoitetaan yhtenäistä jaksoa, jonka palvelin kerrallaan on käynnissä. Kahden kiirejakson välissä on joutojakso.



Merkitään $\begin{cases} B &= \text{kiirejakson pituus} \\ I &= \text{joutojakson pituus} \end{cases}$

Poisson-prosessissa saapumisväliajat ovat Exp(λ)-jakautuneita. Tämän muistittomuudesta johtuen joutojaksot (aika kiirejakson päättymisestä seuraavaan saapumiseen) noudattavat samaa jakaumaa, $I \sim \text{Exp}(\lambda)$, joten $\boxed{\mathrm{E}[I] = 1/\lambda}$.

Palvelimen kuorma $\rho = \lambda \mathrm{E}[S]$ on Littlen lauseen mukaan sama kuin keskimääräinen asiakkaiden lukumäärä. Koska palvelimessa voi olla kerrallaan vain yksi asiakas, kyseinen odotusarvo on sama kuin todennäköisyys, että palvelimessa on asiakas ja tämä on edellen sama kuin aikaosuus, jonka palvelin on käytössä:

$$\lambda \mathrm{E}[S] = \frac{\mathrm{E}[B]}{\mathrm{E}[B] + \mathrm{E}[I]} = \frac{\mathrm{E}[B]}{\mathrm{E}[B] + 1/\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\mathrm{E}[B] = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{\mathrm{E}[S]}{1-\rho}}$$

$M/M/1$-jonon tapauksessa tämä on sama kuin $\mathrm{E}[T]$:n kaava eli sama kuin asiakkaan keskimääräinen viipymä systeemissä!

Kiirejakson aikana keskimäärin palveltujen asiakkaiden lukumäärä

Kiirejakso muodostuu aina tietyn asiakasjoukon täydellisestä palvelemisesta.
Olkoon jakson aikana palveltujen asiakkaiden lukumäärä N_b. Päätellään odotusarvo $\mathrm{E}[N_b]$.

- Jokaisen kiirejakson ensimmäinen asiakas näkee systeemin tyhjänä, muut ei-tyhjänä.
- Saapuva asiakas näkee siten systeemin tyhjänä todennäköisyydellä $1/\mathrm{E}[N_b]$.
- Todennäköisyys, että systeemi on tyhjä satunnaisella ajanhetkellä on $1-\rho$.
- PASTA-ominaisuuden perusteella nämä todennäköisyydet ovat yhtäsuuret.

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\mathrm{E}[N_b] = \frac{1}{1-\rho}}$$

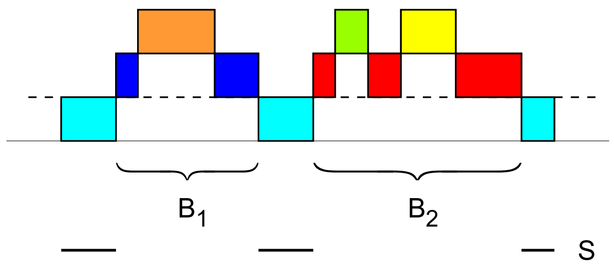
Koska asiakkaan keskimääräinen palveluaika on $\mathrm{E}[S]$, tästä seuraa uudelleen, että

$$\mathrm{E}[B] = \frac{\mathrm{E}[S]}{1-\rho}$$

$M/G/1$-jonon kiirejakson pituusjakauma

$$\text{Merkitään} \quad \begin{cases} B &= \text{kiirejakson kesto} \\ S &= \text{kiirejakson aloittavan asiakkaan palveluaika} \\ V &= \text{tänä palveluaikana saapuneiden uusien asiakkaiden lukumäärä} \end{cases}$$

Kiirejakson kesto on riippumaton palvelujärjestyksestä kunhan tämä on työnsäilyttävä. Tarkastelua varten voidaan siten valita mikä tahansa vuoronjakomenetelmä. Helpointa on tarkastella pinoa eli LIFO-jonoa.



- Ensimmäinen kiirejakson aikana saapuva asiakas keskeyttää kiirejakson aloittaneen asiakkaan palvelun.
- Kun tarkastellaan jaksoa tästä hetkestä siihen asti, kun kiirejakson aloittaneen asiakkaan palvelua jatketaan, havaitaan että ko. jakso itse muodostaa kiirejakson, joka on jakautunut samalla tavalla kuin B, ns. “minikiirejakson”.
  - Voi tuntua paradoksaaliselta, että kiirejakson sisällä voi olla samalla tavalla jakautuneita minikiirejaksoja. Minikiirejaksojen lukumäärän odotusarvo on kuitenkin < 1.
- Tällaisia minikiirejaksoja on V kappaletta: aloittavan asiakkaan palvelu tapahtuu paloissa, joista kunkin kesto $\sim \text{Exp}(\lambda)$ (viimeistä lukuunottamatta); minikiirejaksojen lukumäärä on sama kuin palojen rajakohtien lukumäärä, joka on sama kuin saapumisten määrä Poisson(λ)-prosessista aikana S.

$M/G/1$-jonon kiirejakson pituusjakauma (jatkoa)

$$B = S + B_1 + B_2 + \cdots + B_V, \qquad V = 0, 1, 2, \ldots, \qquad B \sim B_1 \sim B_2 \sim \cdots \sim B_V$$

$$\begin{aligned}
B^*(s) &= \mathrm{E}[e^{-sB}] = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[e^{-sB}\,|\,V,S\right]|\,S\right]\right] = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[e^{-s(S+B_1+B_2+\cdots+B_V)}\,|\,V,S\right]|\,S\right]\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[e^{-sS}\mathrm{E}\left[e^{-s(B_1+B_2+\cdots+B_V)}\,|\,V,S\right]|\,S\right]\right] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[e^{-sS}\underbrace{\mathrm{E}[e^{-sB}]}_{B^*(s)}{}^V \mid S]] \\
&= \mathrm{E}[e^{-sS}\underbrace{\mathrm{E}\left[B^*(s)^V\,|\,S\right]}_{e^{-(1-B^*(s))\lambda S}}] = \mathrm{E}[e^{-(s+\lambda(1-B^*(s)))S}]
\end{aligned}$$

$$\boxed{B^*(s) = S^*(s + \lambda - \lambda B^*(s))}$$ Takácsin yhtälö (funktionaaliyhtälö) $B^*(s)$:lle

Esimerkki: B:n ensimmäisen momentin laskeminen

$$\mathrm{E}[B] = -B^{*\prime}(0) = \underbrace{S^{*\prime}(0)}_{-\mathrm{E}[S]}(1 - \lambda\,\underbrace{B^{*\prime}(0)}_{-\mathrm{E}[B]})$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{E}[B] = \frac{\mathrm{E}[S]}{1-\rho}\,, \qquad \text{missä } \rho = \lambda \mathrm{E}[S]$$

Tämä on yhtäpitävä aikaisemmin johdetun tuloksen kanssa.
Vastaavalla tavalla voidaan johtaa B:n korkeampia momentteja.

$M/G/1$-jonon jononpituusjakauman algoritminen laskenta

Edellä on johdettu tulos, Pollaczek-Khinchinin muunnoskaava, jononpituusjakauman generoivalle funktiolle.

- Tulos on teoreettisesti tärkeä.
- Sen avulla voidaan helposti johtaa mm. jakauman momentteja.
- Itse jakauman (todennäköisyydet, joilla eri jononpituudet esiintyvät) laskemiseen tulos ei kuitenkaan ole kovin käyttökelpoinen, koska z-riippuvuus siinä on monimutkainen.

Jononpituusjakauma on kuitenkin mahdollista selvittää laskennallisesti (ei suljetussa muodossa kaavana) hyvin suoraviivaisella tavalla. Seuraavassa esitetään tähän soveltuva algoritmi.

Tarkastellaan jälleen upotettua Markovin ketjua N_k eli jononpituutta heti jonosta poistumista seuraavina ajanhetkinä. Todettiin, että tämä ketju kehittyy seuraavasti:

$$N_{k+1} = \begin{cases} N_k - 1 + V & \text{kun} \quad N_k \geq 1 \\ V & \text{kun} \quad N_k = 0 \end{cases}$$

missä V on asiakkaan $k+1$ palveluaikana saapuneiden uusien asiakkaiden lukumäärä.

Palveluaikana saapuvien uusien asiakkaiden lukumäärän V jakauma

Merkitään

$$\begin{cases} k_i & = \mathrm{P}\{V = i\} \\ f_S(x) & = \text{palveluajan } S \text{ tiheysfunktio} \end{cases}$$

Kokonaistodennäköisyyden kaavan mukaan pätee

$$k_i = \mathrm{P}\{V = i\} = \int_0^\infty \mathrm{P}\{V = i \,|\, S = x\} f_S(x) dx = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^i}{i!} e^{-\lambda x} f_S(x) dx$$

$$\boxed{k_i = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^i}{i!} e^{-\lambda x} f_S(x) dx} \qquad i = 0, 1, \ldots$$

Kun saapumisintensiteetti λ ja palveluajan tiheysfunktio $f_S(x)$ on annettu, todennäköisyydet k_i voidaan laskea ainakin numeerisesti. Joidenkin yksinkertaisten jakaumien tapauksessa integrointi voidaan tehdä analyyttisesti.

Esimerkki. Eksponentiaalinen palveluaikajakauma ($M/M/1$-jono)

$$k_i = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^i}{i!} e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu x} dx = \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^i \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{i!} \underbrace{\int_0^\infty y^i e^{-y} dy}_{i!} = \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^i \frac{\mu}{\lambda + \mu} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} \text{muuttujan vaihto} \\ y = (\lambda + \mu) x \end{array}$$

Geometrinen jakauma: “λ ja μ kilpailevat”; “λ voittaa” i kertaa, kunnes “häviää μ:lle”.

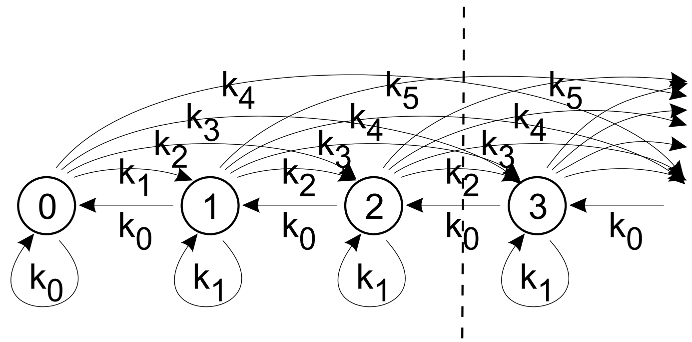
Upotetun ketjun siirtymätodennäköisyysmatriisi

Suureen N_k kehittymistä koskevasta yhtälöstä nähdään tilasiirtymätodennäköisyydet

$$p_{i,j} = \mathrm{P}\{N_{k+1} = j \,|\, N_k = i\} = \begin{cases} \mathrm{P}\{V = j - i + 1\} \;=\; k_{j-i+1} & \text{jos } i \geq 1 \\ \mathrm{P}\{V = j - i\} \;=\; k_{j-i} & \text{jos } i = 0 \end{cases}$$

Tilasiirtymämatriisi ja -kaavio ovat siten

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \cdots \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \cdots \\ 0 & k_0 & k_1 & k_2 & \cdots \\ 0 & 0 & k_0 & k_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$



Leikkausmenetelmä antaa rekursiokaavat

$$\begin{cases} k_0\pi_1 = (k_1 + k_2 + \ldots)\pi_0 \\ k_0\pi_2 = (k_2 + k_3 + \ldots)\pi_0 + (k_2 + k_3 + \ldots)\pi_1 \\ k_0\pi_3 = (k_3 + k_4 + \ldots)\pi_0 + (k_3 + k_4 + \ldots)\pi_1 + (k_2 + k_3 + \ldots)\pi_2 \\ \vdots \\ k_0\pi_i = (k_i + k_{i+1} + \ldots)\pi_0 + (k_i + k_{i+1} + \ldots)\pi_1 + \ldots + (k_2 + k_3 + \ldots)\pi_{i-1} \end{cases}$$

joista π_i:t voidaan peräkkäin ratkaista lähtien tunnetusta arvosta $\pi_0 = 1 - \rho$.

Rekursiokaava (jatkoa)

Merkitään: $a_i = k_{i+1} + k_{i+2} + k_{i+3} + \ldots = \mathrm{P}\{V > i\}$

ts. a_i on todennäköisyys sille, että palveluaikana S saapuu vähintään $i+1$ uutta asiakasta.

Tämän avulla kirjoitettuna yleinen rekursioaskel saa muodon

$$\boxed{\pi_i = \frac{1}{k_0}\left(a_{i-1}\pi_0 + \sum_{j=1}^{i-1} a_{i-j}\pi_j\right)}$$

Koska $k_0 + k_1 + k_2 + \ldots = 1$, pätee
$k_0 = 1 - (k_1 + k_2 + \ldots) = 1 - a_0$.

Rekursio alkaa arvosta $\pi_0 = 1 - \rho$.

Rekursiokaava (jatkoa)

Kertoimia a_i ei tarvitse laskea määritelmän mukaisen sarjan summana, vaan niille saadaan yksinkertainen integraalilauseke. Merkitään X_j:llä yleistä väliaikaa Poisson-saapumisprosessissa, jonka intensiteetti on λ, $X_j \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Tällöin määritelmän mukaan on

$$a_i = \mathrm{P}\{S > X_1 + X_2 + \cdots + X_{i+1}\}$$

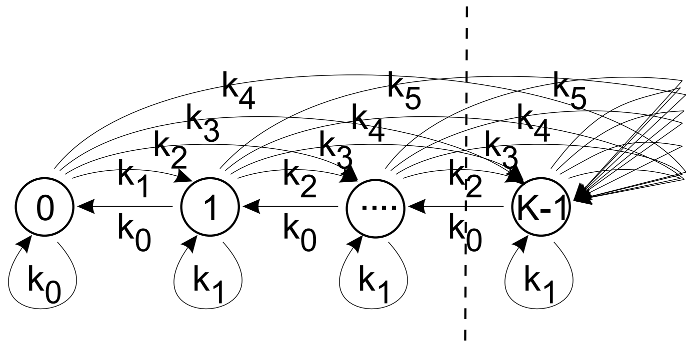
Summa $X_1 + X_2 + \cdots + X_{i+1}$ noudattaa jakaumaa Erlang$(i+1, \lambda)$ ja sen tiheysfunktio on $\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^i/i!$.

Ehdolla, että kyseisen summan arvo on x, laskettavan todennäköisyyden antaa S:n häntäjakaumafunktio $G_S(x) = 1 - F_S(x)$. Kokonaistodennäköisyyden kaavan mukaan on siten

$$\boxed{a_i = \int_0^\infty G_S(x)\frac{(\lambda x)^i}{i!}\lambda e^{-\lambda x}dx = \int_0^\infty G_S(y/\lambda)\frac{y^i}{i!}e^{-y}dy}$$

Tästä a_i:t voidaan laskea numeerisesti.

Äärellinen $M/G/1/K$-jono



Jonossa on K systeemipaikkaa (palvelin + odotuspaikat).

Jononpituusjakauma äärelliselle systeemille voidaan johtaa vastaavasta äärettömän jonon jakaumasta. Tähän tarvitaan muutama päättelyaskel.

Tarkastellaan jälleen upotettua Markovin ketjua, jonka muodostaa lähtevän asiakkaan jälkeensä jättämä jononpituus N.

Ensimmäinen havainto on, että suurin arvo, joka N:llä voi olla, on $K-1$. Jono on voinut olla ennen poistumista täynnä, $N = K$, mutta poistumisen jälkeen asiakkaita on yksi vähemmän.

Toinen havainto on, että tilaan $K-1$ asti tilasiirtymäkaavio on täsmälleen sama kuin äärettömässä systeemissä. Ainoa ero on, että kaikki siirtymät, jotka olisivat äärettömässä systeemissä johtaneet tilaan $N > K-1$, aiheuttavat nyt sen, että poistuneen asiakkaan palveluaikana jono on täyttynyt ja asiakkaita on vuotanut yli. Lopputuloksena on, että kaikki nämä siirtymät johtavatkin suoraan tilaan $K-1$ kuvan mukaisesti.

Olennaista on, että siirtymät kaikkien tilan $K-1$ alapuolella olevien leikkausten yli ovat samat kuin äärettömässä systeemissä. Tilatodennäköisyyksien suhteet pysyvät samoina. Jakauma saadaan uudelleennormittamalla.

Äärellinen $M/G/1/K$-jono (jatkoa)

Merkitään

$$\begin{cases} \pi_i^{(\infty)} & = \text{ tn., jolla lähtevä asiakas jättää taakseen jononpituuden } i \text{ äärettömässä systeemissä} \\ \pi_i^{(K)} & = \text{ tn., jolla lähtevä asiakas jättää taakseen jononpituuden } i \text{ äärellisessä systeemissä} \end{cases}$$

Äsken sanotun perusteella pätee

$$\boxed{\pi_i^{(K)} = \frac{\pi_i^{(\infty)}}{\sum_{j=0}^{K-1} \pi_j^{(\infty)}}} \qquad i = 0, 1, \ldots, K-1$$

Todennäköisyydet $\pi_i^{(\infty)}$ lasketaan edellä esitetyllä algoritmilla.

Tasonylitysargumentin avulla päätellään, että $\pi_i^{(K)}$ antaa myös todennäköisyyden, jolla jonoon hyväksytty saapuva asiakas näkee edessään jononpituuden i:

- tilasta i tapahtuu yhtä paljon siirtymiä tilaan $i+1$ kuin tilasta $i+1$ tilaan i
- on vain huomattava, että kaikki saapumiset eivät pääse sisään, ja niin ollen $\pi_i^{(K)}$ ei ole saapuvan asiakkaan näkemä tilatodennäköisyys

Äärellinen $M/G/1/K$-jono (jatkoa)

Merkitään toistaiseksi tuntemattomia saapuvan asiakkaan näkemiä tilatodennäköisyyksiä p_i:llä, $i = 0, 1, \ldots, K$ (huom. asiakkaan saapuessa jono voi olla myös tilassa K). PASTA:n perusteella p_i on myös tasapainotodennäköisyys mielivaltaisella hetkellä.

Merkitään

$$\begin{cases} X^* &= \text{saapuvan asiakkaan näkemä jononpituus} \\ A &= \text{asiakas pääsee jonoon sisään} = \{X^* < K\} \\ \bar{A} &= \text{asiakas estyy} = \{X^* = K\} \end{cases}$$

Kun $i < K$, pätee

$$p_i = \mathrm{P}\{X^* = i\} = \underbrace{\mathrm{P}\{X^* = i \,|\, A\}}_{\pi_i^{(K)}} \underbrace{\mathrm{P}\{A\}}_{1-p_K} + \underbrace{\mathrm{P}\{X^* = i \,|\, \bar{A}\}}_{0} \underbrace{\mathrm{P}\{\bar{A}\}}_{p_K} = (1 - p_K)\pi_i^{(K)}, \qquad i < K$$

Tuntemattoman p_K:n määräämiseen käytetään ehtoa, että jonoon pääsee sisään asiakkaita keskimäärin samalla frekvenssillä kuin niitä poistuu jonosta ($\rho = \lambda \mathrm{E}[S]$):

$$\lambda(1 - p_K) = (1 - p_0)/\mathrm{E}[S] = (1 - (1 - p_K)\pi_0^{(K)})/\mathrm{E}[S] \quad \Rightarrow \quad 1 - p_K = \frac{1}{\rho + \pi_0^{(K)}}$$

$$\boxed{p_i = \frac{\pi_i^{(K)}}{\rho + \pi_0^{(K)}}} \quad i = 0, 1, \ldots, K - 1 \qquad \boxed{p_K = 1 - \frac{1}{\rho + \pi_0^{(K)}}}$$

Äärellinen $M/G/1/K$-jono (yhteenveto)

Kootaan kaikki tulokset yhteen jättäen välivaiheet pois ja muokaten lopputulosta:

Ensin lasketaan äärettömän systeemin jononpituusjakauma rekursiivisesti:

$$\begin{cases} \pi_0^{(\infty)} = 1-\rho \\ \pi_i^{(\infty)} = \dfrac{1}{1-a_0}\left(a_{i-1}\pi_0^{(\infty)} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{i-j}\pi_j^{(\infty)}\right) \end{cases} \qquad a_i = \int_0^\infty G_S(x)\frac{(\lambda x)^i}{i!}\lambda e^{-\lambda x}dx$$

missä $G_S(x)$ on palveluajan S häntäjakauma.

Sitten lasketaan äärettömän jonon häntätodennäköisyys (joka on yleensä pieni)

$$q_K = \sum_{i=K}^{\infty} \pi_i^{(\infty)} = 1 - \sum_{i=0}^{K-1} \pi_i^{(\infty)}$$

Näiden avulla voidaan lopputulos kirjoittaa

$$\boxed{p_i = \frac{\pi_i^{(\infty)}}{1-q_K\rho}} \quad i = 0, 1, \ldots, K-1 \qquad \boxed{p_K = \frac{(1-\rho)q_K}{1-q_K\rho}}$$