

1. Olkoon $S = X_1 + \dots + X_N$, missä $X_i \sim \text{Exp}(\mu)$ ovat riippumattomia samoin jakautuneita satunnaismuuttujia ja N näistä riippumaton geometrisesti jakautunut satunnaismuuttuja, $P\{N = k\} = (1 - p)p^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$. Johda S :n häntäjakauma $G(x) = P\{S > x\}$.
2. Osoita suoraan laskemalla (ilman generoivaa funktiota), että kahden Poisson-jakautuneen kokonaislukumuuttujan $N_1 \sim \text{Poisson}(a_1)$ ja $N_2 \sim \text{Poisson}(a_2)$ summa on Poisson-jakautunut: $(N_1 + N_2) \sim \text{Poisson}(a_1 + a_2)$. Totea sama generoivan funktion avulla.
3. Olkoon X eksponentiaalisesti jakautunut satunnaismuuttuja. Tekemättä mitään laskuja kerro, mikä seuraavista kolmesta väitteestä on tosi. Perustele.
 - a) $E[X^2|X > 1] = E[(X + 1)^2]$
 - b) $E[X^2|X > 1] = E[X^2] + 1$
 - c) $E[X^2|X > 1] = (1 + E[X])^2$
4. Nelitilaisen Markovin ketjun tilasiirtymämatriisi on

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Piirrä ketjun tilasiirtymäkaavio ja päättele, mitkä tilat ovat transienteja ja mitkä palautuvia.

5. Aika absorptioon. Kolmitilaisella Markovin ketjulla (tilat $i = 1, \dots, 3$) on seuraava siirtymätodennäköisyysmatriisi:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tila 3 on absorboiva tila. Merkitään T_i :llä keskimääräistä aikaa (askelten määrää), joka tilassa i olevalta systeemiltä kuluu absorboivaan tilaan siirtymiseen ($T_3 = 0$). Kirjoita yhtälöt T_i :lle, $i = 1, 2$, perustuen siihen, että seuraava siirtymä $i \rightarrow j$ vie yhden askeleen ja markovisuuden nojalla siitä eteenpäin kuluu keskimäärin T_j askelta absorboivaan tilaan pääsemiseksi. Ratkaise yhtälöt.

6. Määritellään äärettömän pitkässä Bernoulli(p)-kokeiden jonossa n :nnellä kokeella järjestelmän tilaksi luku, joka kertoo kuinka mones perättäinen onnistunut koe on kyseessä eli kuinka pitkä matka on edelliseen epäonnistuneeseen kokeeseen. Jos koe n epäonnistui, niin $X_n = 0$; jos se onnistui, mutta edellinen epäonnistui, niin $X_n = 1$, jne. a) Mikä on järjestelmän tila-avaruus? b) Perustele, että X_n muodostaa Markovin ketjun. c) Kirjoita Markovin ketjun tilasiirtymämatriisi (näytä sen struktuuri).