TEKNILLINEN KORKEAKOULU
Tietoverkkolaboratorio
S-38.3143 Jonoteoria, II/2007

Laskuharjoitus 1
6.11.2007
Virtamo / Penttinen

1. Kahdesta kolikosta toinen on tavallinen kun taas toisessa kolikossa on molemmilla puolilla kruuna. Näistä kolikoista valitaan toinen umpimähkään ja sitä heitetään m kertaa kaikkien m heiton päätyessä kruunaan. Mikä on todennäköisyys, että valittu kolikko on tavallinen? Laske arvo kun $m = 1, 2, 3$.

2. Bernoulli-kokeessa saadaan tulos 1 todennäköisyydellä p ja tulos 0 todennäköisyydellä $q = 1 - p$. Arvoa p ei tunneta, mutta tiedetään, että se on alunpitäen vedetty tasaisesta jakaumasta välillä (0,1), ts. kaikkia arvot tällä välillä ovat *a priori* yhtä todennäköisiä. p:n todellisesta arvosta yritetään saada informaatiota suorittamalla toistettu Bernoulli-koe. Kokeessa 0-tuloksia saadaan n_0 kertaa ja 1-tuloksia n_1 kertaa. Mikä on p:n *a posteriori* -jakauma (Bayes) kokeen tuloksen valossa? Missä sijaitsee jakauman maksimi?

3. Sovella keskiarvon ja varianssin ketjusääntöjä

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X] &= \mathrm{E}[\mathrm{E}[X|Y]] \\ \mathrm{V}[X] &= \mathrm{E}[\mathrm{V}[X|Y]] + \mathrm{V}[\mathrm{E}[X|Y]] \end{aligned}$$

   tapaukseen $X = X_1 + \ldots + X_N$, missä X_i:t ovat riippumattomia identtisesti jakautuneita satunnaismuuttujia (keskiarvo m, varianssi σ^2) ja N on positiivinen kokonaislukuarvoinen satunnaismuuttuja (keskiarvo n, varianssi ν^2). Ehdollista laskenta N:n arvoihin.

4. Lähiverkossa kulkee viiteen eri sovellukseen liittyviä paketteja. Kunkin sovelluksen i, $i = 1, \ldots, 5$, lähettämien pakettien keskipituus m_i ja keskihajonta σ_i on määrätty kokeellisesti. Samoin on määrätty kuhunkin sovellukseen liittyvien pakettien osuus p_i kaikista paketeista. Mitatut arvot on annettu allaolevassa taulukossa. Laske kaikkien verkossa kulkevien pakettien pituuksien keskiarvo ja keskihajonta.

sovellus	p_i	m_i	σ_i
1	0.30	100	10
2	0.15	120	12
3	0.40	200	20
4	0.10	75	5
5	0.05	300	25

5. Lähiverkossa kulkee liikennettä stationaarisena prosessina siten, että kaikki samanpituiset jaksot ovat tilastollisesti identtisiä. Merkitään X_1:llä, X_2:lla ja X_3:lla liikenteen määriä (kB) peräkkäisissä 10 min jaksoissa. Pitkäaikaisen liikennemittauksen perusteella on laskettu liikenteen määrän (esim. kB) varianssit 10 min ja 20 min ja 30 min pituisissa jaksoissa: v_1, v_2 ja v_3. Toisin sanoen $v_1 = \mathrm{V}[X_1] = \mathrm{V}[X_2] = \mathrm{V}[X_3]$, $v_2 = \mathrm{V}[X_1 + X_2] = \mathrm{V}[X_2 + X_3]$ ja $v_3 = \mathrm{V}[X_1 + X_2 + X_3]$. Laske $\mathrm{Cov}[X_1, X_2] = \mathrm{Cov}[X_2, X_3]$ sekä $\mathrm{Cov}[X_1, X_3]$ varianssien v_1, v_2 ja v_3 avulla. Ohje: esim. edellinen seuraa kehittämällä $v_2 = \mathrm{V}[X_1 + X_2] = \mathrm{Cov}[X_1 + X_2, X_1 + X_2]$ auki.

6. Reitittimeen saapuvien pakettien pituuksien (tavuina) oletetaan noudattavan geometrista jakaumaa. Pakettien keskipituus on 100 tavua. Jokainen paketti luetaan ensin tulopuskuriin. Kuinka suuri tämän puskurin tulee olla, jotta saapuva paketti mahtuisi siihen vähintään 95 % todennäköisyydellä?