



S-38.211 Signaalinkäsittely tietoliikenteessä I

Signal Processing in Communications (2 ov)

Syksy 1997

9. Luento: Kanavan kapasiteetti ja OFDM

prof. Timo Laakso

Vastaanotto torstaisin klo 10-11

Huone G210, puh. 451 2473

Sähköposti: timo.laakso@hut.fi

Notaatiosta



- ♦ Merkitään ei-negatiivisen reaaliarvoisen funktion *aritmeettista keskiarvoa*:

$$\langle f \rangle_{A,X} = \frac{1}{|X|} \int_X f(x) dx \quad (10.3)$$

- ♦ missä itseisarvo on joukon X kokonaismitta (yl. integrointivälin pituus). Vastaavasti määritellään *geometrinen keskiarvo*:

$$\langle f \rangle_{G,X} = \exp \left\{ \frac{1}{|X|} \int_X \log_e [f(x)] dx \right\} \quad (10.4)$$

- ♦ Voidaan osoittaa, että aina pätee

$$\langle f \rangle_{G,X} \leq \langle f \rangle_{A,X} \quad (10.7)$$



- ◆ Aikanaan todettiin jatkuva-aikaisen kaistarajoitetun Gaussin kanavan kapasiteetiksi

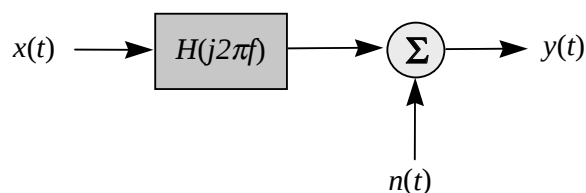
$$C = W \log_2(1 + \text{SNR}) \quad \text{bit / s}$$

- ◆ missä W on (yksipuolinen) kaistanleveys ja SNR on keskimääräisen signaalitehon ja kohinatehon suhde. Tulos pätee kuitenkin vain olettaen, että
 - *kohina* on taajuussisällöltään *valkoista* (kaistalla W)
 - kanava *ei* aiheuta *taajuusselektiivistä vaimennusta* (josta seuraa ISIä!)
- ◆ Seuraavaksi tarkastellaan *yleistä lineaarista kanavaa värillisessä Gaussin kohinassa*. Tämä tulos on tärkeä, sillä se kertoo rajat adaptiivisten korjaimien suorituskyvylle.

Vedenkaatoteoreema (LM 10.5.1)



- ◆ Tarkastellaan **Kuvan 10-19** lineaarista jatkuva-aikaista kanavamallia:



- ◆ Otetaan kanavasta *kapea taajuussiivu* Δf taajuudelta f_0 . Merkitään:
 - ◆ $S_x(j2\pi f_0)$ = *signaalin* tehospektri taajuudella f_0
 - ◆ $S_n(j2\pi f_0)$ = *kohinan* tehospektri taajuudella f_0
 - ◆ $H(j2\pi f_0)$ = *kanavan vaste* taajuudella f_0



- ◆ Oletetaan lisäksi että kokonaisteho P_s on rajoitettu. Lähetyssignaalin $x(t)$ spektri $S_x(j2\pi f_0)$ halutaan valita niin että saavutetaan maksimikapasiteetti.
- ◆ Koska kapea taajuussiivu voidaan olettaa valkoisen Gaussin kohinan kanavaksi, siivun kapasiteetiksi saadaan

$$\begin{aligned} C(j2\pi f_0) &= \Delta f \log_2 \left(1 + \frac{2S_x(j2\pi f_0)|H(j2\pi f_0)|^2 \Delta f}{2S_n(j2\pi f_0)\Delta f} \right) \\ &= \Delta f \log_2 \left(1 + \frac{S_x(j2\pi f_0)|H(j2\pi f_0)|^2}{S_n(j2\pi f_0)} \right) \end{aligned} \quad (10.106)$$



- ◆ Raja-arvoprosessilla ja integroimalla koko taajuusalueen yli saadaan kokonaiskapasiteetti:

$$\begin{aligned} C &= \int_0^\infty \log_2 \left(1 + \frac{S_x(j2\pi f)|H(j2\pi f)|^2}{S_n(j2\pi f)} \right) df \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \log_2 \left(1 + \frac{S_x|H|^2}{S_n} \right) df \end{aligned} \quad (10.107)$$

- ◆ Määritetään nyt optimaalinen signaalin tehospektri siten että kapasiteetti maksimoituu. Kokonaisteho on rajoitettu (ja positiivinen!):

$$P_s = \int_{-\infty}^\infty S_x df, \quad S_x > 0 \quad (10.108)$$



- ◆ Rajoitettu optimointiprobleema voidaan muotoilla *Lagrangen kertojan* avulla seuraavasti: Maksimoidaan funktio

$$g(S_x, \lambda) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \log_2 \left(1 + S_x |H|^2 / S_n \right) df + \lambda \left[P_s - \int_{-\infty}^{\infty} S_x df \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \log_2 \left(1 + S_x |H|^2 / S_n \right) - \lambda S_x \right] df + \lambda P_s \quad (10.109)$$

- ◆ Optimi löytyy derivaattojen nollakohdasta:

$$\frac{\partial g}{\partial S_x} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2 \ln 2} \cdot \frac{1}{1 + S_x |H|^2 / S_n} \cdot \frac{|H|^2}{S_n} - \lambda \right] df = 0$$

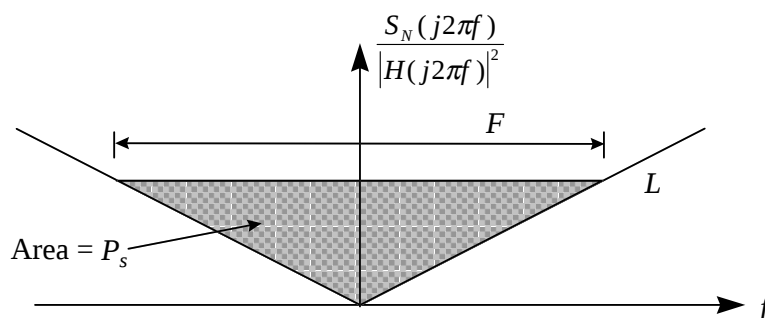
$$\frac{\partial g}{\partial \lambda} = P_s - \int_{-\infty}^{\infty} S_x df = 0$$



- ◆ Ratkaisu saadaan muotoon

$$S_x = \begin{cases} L - \frac{S_n}{|H|^2}, & f \in F \\ 0, & \text{muutoin} \end{cases} \quad (10.110)$$

- ◆ missä $L = 1/2 \ln 2 \lambda$ (kirjassa painovirhe!) valitaan kokonaistehon P_s mukaan ja F on se taajuusalue jossa saatu S_x on positiivinen. Tätä tulosta havainnollistaa **Kuva 10-20**:





- ◆ Kuvassa on esitetty kanavan amplitudivasteella *normalisoitu kohinan tehospektri*
- ◆ Kuvasta nähdään että *lähetystehoa kannattaa käyttää eniten taajuuksilla joissa*
 - kohinatehotiheys on pieni
 - kanavan vaste on suuri (pieni vaimennus)
- ◆ Kokonaisteho saadaan integroimalla L :n ja normalisoidun spektrin välinen alue:

$$P_s = \int_{-\infty}^{\infty} S_x df = \int_{-\infty}^{\infty} \left[L - \frac{S_n}{|H|^2} \right] df$$

Kapasiteetti ja keskiarvot (LM 10.5.3)



- ◆ Edellä johdetuissa kaavoissa jäi ratkaisematta Lagrangen kertoja λ (tai siitä riippuva parametri L) jotka riippuvat kokonaistehosta. Se ratkaistaan seuraavaksi. Näin kapasiteetti saadaan pelkästään kanavaparametreista riippuvaan muotoon.
- ◆ Kaavasta (10.110) saadaan integroimalla

$$\begin{aligned} \frac{P_s}{|F|} &= \int_F S_x df = L - \int_F \frac{S_n}{|H|^2} df \\ &= \langle S_x \rangle_A = L - \langle S_n / |H|^2 \rangle_A \end{aligned} \quad (10.129)$$



- ◆ Sijoittamalla tämä kapasiteetin lausekkeeseen (10.119) saadaan

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2} \int_F \log_2 \left(1 + \left[L - \frac{S_n}{|H|^2} \right] \frac{|H|^2}{S_n} \right) df = \\ &= \frac{1}{2} \int_F \log_2 \left(\frac{L|H|^2}{S_n} \right) df \quad (10.130) \end{aligned}$$

ja edelleen käyttämällä geometrisen keskiarvon ominaisuutta

$$\log_2 \langle H \rangle_G = \frac{1}{|F|} \int_F \log_2(H) df \quad (10.5)$$



Saadaan

$$C = \frac{|F|}{2} \log_2 \left\langle \frac{L|H|^2}{S_n} \right\rangle_G = \frac{|F|}{2} \log_2 \left(\frac{L}{\langle S_n / |H|^2 \rangle_G} \right) \quad (10.131)$$

Ratkaistaan L (10.129):stä ja sijoitetaan

$$C = \frac{|F|}{2} \log_2 \left(\frac{P_s / |F| + \langle S_n / |H|^2 \rangle_A}{\langle S_n / |H|^2 \rangle_G} \right) \text{ bit / s} \quad (10.132)$$

Tämä on **yleinen lineaarisen kanavan kapasiteetti** joka sisältää siis myös ISIn vaikutuksen. Se kertoo, mihin asti adaptiivisilla korjaimilla, kanavakoodauksella yms. konsteilla voidaan kanavan kapasiteettia korkeintaan nostaa.



- ◆ Kun kohina $S_n = N_0$ on valkoista, kapasiteetiksi saadaan

$$C = \frac{|F|}{2} \log_2 \left(\frac{SNR + \langle |H|^{-2} \rangle_A}{\langle |H|^{-2} \rangle_G} \right) \text{ bit / s} \quad (10.133)$$

missä

$$SNR = P_s / (|F| N_0)$$

Edelleen, jos kanava on $H = 1$, kaava redusoituu Shannonin perusmuotoon

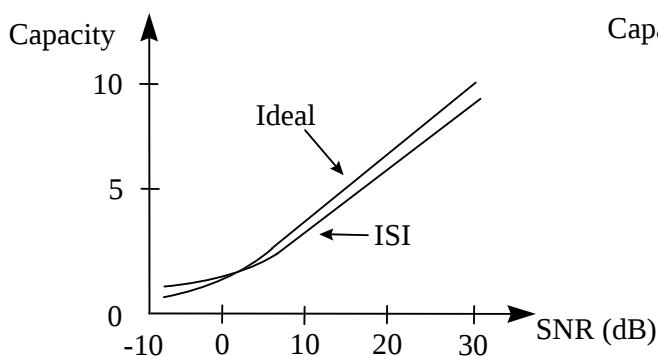
$$C = \frac{|F|}{2} \log_2 \left(\frac{SNR + 1}{1} \right) = W \log_2 (1 + SNR) \text{ bit / s}$$

missä $F = 2W$ on kaksipuolinen kaistanleveys.

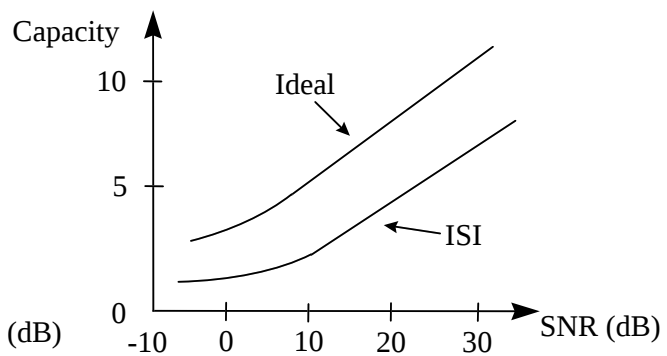
Esimerkki: FIR- ja IIR-kanavan kapasiteetti.



- ◆ Tarkastellaan 1. asteen diskreettiä kanavamallia joka sisältää joko yhden nollan tai navan jonka säde on $c = 0.99$. Vastaava kanavan kapasiteetti eri signaalikohinasuhteilla (valkoista Gaussin kohinaa) näkyy **Kuvissa 10-24 ja 10-25**.
- ◆ Miltäs näyttää? Mistä erot johtuvat?



Kuva 10-24: FIR-kanava



Kuva 10-25: IIR-kanava



- ◆ Yksi tapa käyttää tehokkaasti lineaarista kanavaa on ns. OFDM-tekniikka (Orthogonal Frequency Division Multiplex) joka on monikantoaaltojärjestelmä.
- ◆ Seuraavassa johdetaan ensin yleinen korrelaattori-vastaanotinrakenne ortogonaalisille monipulssijärjestelmille ja sitten tarkastellaan OFDM:n toteutusta erikoistapauksena.

Sovitettu suodin ja korrelaattori



- ◆ Vastaanottosuotimen ja näytteenoton lähtösignaali:

$$q_0 = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) f(t - \tau) d\tau \Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) f(-\tau) d\tau \quad (6.91)$$

- ◆ Kun vastaanottosuodin on sovitettu, $f(t) = h(-t)$, saadaan

$$q_0 = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) h(\tau) d\tau$$

joka voidaan toteuttaa *korrelaattiorakenteella*.

- ◆ Tätä korrelaativastaanottimen ideaa voidaan soveltaa monissa käytännön järjestelmissä jotka perustuvat usean lähetyspulssin käyttöön (mm. hajaspektri- ja monikantoaaltojärjestelmät).



- ◆ Pulssiampplitudimodulaatiossa symbolit kerrotaan yhdellä valitulla pulssimuodolla $g(t)$ ja lähetetään kanavaan yksi kerrallaan:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g(t - kT) \quad (6.112)$$

- ◆ Tämä voidaan yleistää tapaukseen jossa kutakin N symbolia vastaa oma pulssimuoto, $g_n(t)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{a_k}(t - kT) \quad (6.113)$$

...Ortogonaalinen monipulssimodulaatio

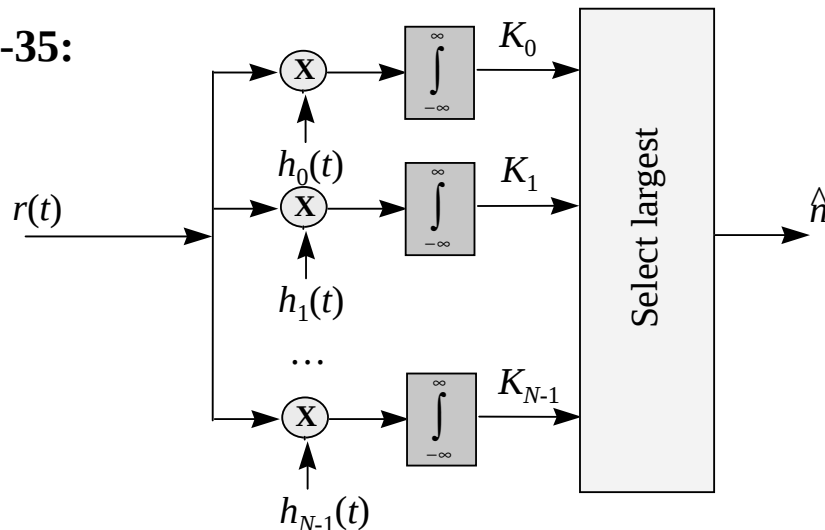


- ◆ Jotta pulssit ovat erotettavissa vastaanottimessa, vaaditaan ortogonaalisuus (+ normalisoidaan tehot): saadaan *ortogonaalinen monipulssimodulaatio*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_i(t) g_j^*(t) dt = \sigma_g^2 \delta_{i-j} \quad (6.114)$$



◆ Kuva 6-35:



- ◆ Tarkastellaan järjestelmää jossa lähetetään yksi N pulssista, n $h_n(t) = 0, 1, \dots, N-1$, jotka ovat ortogonaalisia, eli

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_i(t) h_j^*(t) dt = \sigma_h^2 \delta_{i-j} \quad (6.118)$$

...Korrelaatiovastaanotin monipulssimodulaatiolle



- ◆ Vastaanotettu signaali on siis muotoa

$$y(t) = h_n(t) + n(t) \quad (6.119)$$

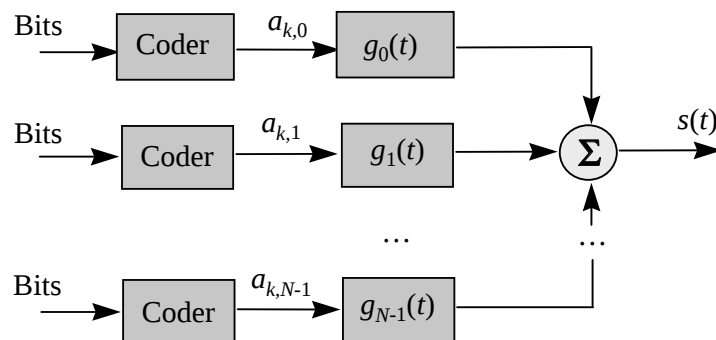
- ◆ Korrelaatiovastaanotin muodostaa N ristikorrelaatiotermiä

$$K_i = \int_{-\infty}^{\infty} h_i(t) y(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} h_i(t) h_n(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} h_i(t) n(t) dt \quad (6.120)$$

- ◆ Ortogonaalisuusehdon mukaan vain K_n poikkeaa kohinasta.



- ◆ Code Division Multiple Access (CDMA) eli *koodijakomonikäyttäjärjestelmä*
- ◆ Perustuu ortogonaalisiin (tai lähes) binäärisekvensseihin
- ◆ Eri käyttäjät käyttävät samaa taajuusaluetta (esim. kuparijohtoa, koaksiaalikaapelia, radio- tai optista kanavaa - jopa siirtoa sähköverkossa on tutkittu!)
- ◆ Lähettimen periaate (**Kuva 6-56**):



Monikantoaaltojärjestelmät



- ◆ Orthogonal Frequency Division Multiplex (OFDM), Discrete Multitone (DMT)
- ◆ Valitaan pulssimuodot seuraavasti:

$$g_n(t) = \sqrt{\frac{1}{T}} e^{j\omega_c t} w(t) \quad (6.167)$$

- ◆ missä $w(t)$ on symbolin mittainen suorakaide ja taajuudet valitaan

$$\omega_c = \frac{2\pi n}{T}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.168)$$



- ◆ Diskreettiaikainen toteutus:

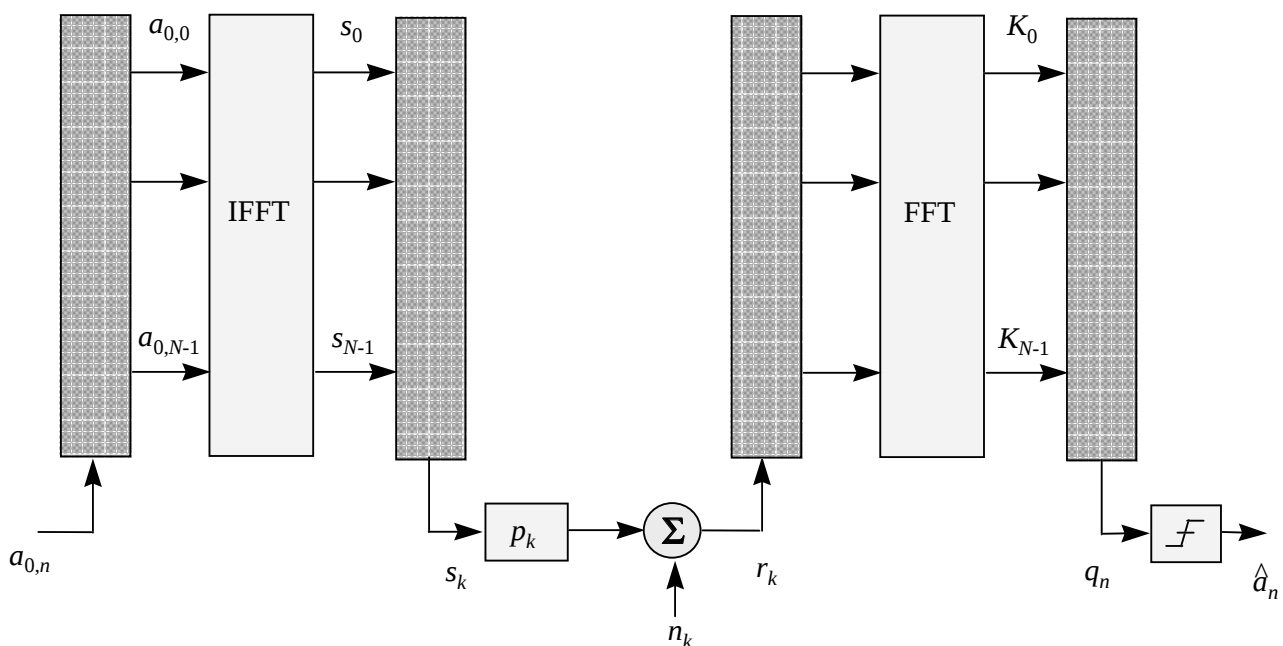
$$g_k^{(n)} = \frac{1}{N} e^{j2\pi nk/N} w_k, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.170)$$

- ◆ Tässä yksi symboli on N näytteen pituinen. Yksi pulssi saadaan symboliarvoilla painotettuna kombinaationa:

$$s_k^{(n)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a_{0,n} e^{j2\pi nk/N} w_k \quad (6.172)$$



- ◆ Lähettimen toteutus IFFT:n avulla (Kuva 6-54)





- ◆ *Vastaanotin*: Korrelaatiopankki FFT:llä
- ◆ Vastaanotetut näytteet muotoa

$$r_k = s_k + z_k \quad (6.173)$$

- ◆ Yhden korrelaattorin laskenta:

$$K_i = \sum_{n=0}^{N-1} r_k e^{-j2\pi i k / N}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (6.174)$$

Monikantaaaltojärjestelmän etuja



- ◆ Kullekin kantaallolle voidaan valita oma aakkosto
- ◆ Signaalin tehospektri säädettävissä kantaalloittain kanavan mukaan (kapasiteetin maksimointi!)
- ◆ Monikäyttö: kanavia voidaan jakaa joustavasti eri käyttäjille esim. radiojärjestelmissä
- ◆ Kanavan ekvalisointi helppoa