



S-38.211 Signaalinkäsittely tietoliikenteessä I

Signal Processing in Communications (2 ov)

Syksy 1997

6. Luento: Adaptiiviset korjaimet I

prof. Timo Laakso

Vastaanotto torstaisin klo 10-11

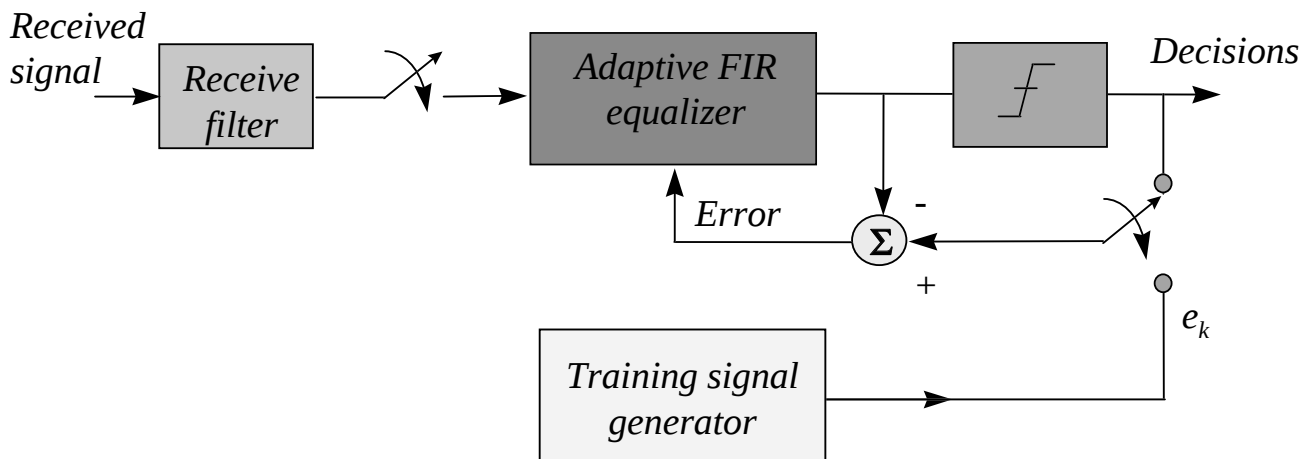
Huone G210, puh. 451 2473

Sähköposti: timo.laakso@hut.fi

Adaptiivinen FIR-korjain (LM 11)



- ◆ Viimeksi tarkasteltiin ideaalisen korjaimen z -siirtofunktiota. Z -siirtofunktion kompleksisuutta ei rajoitettu, ja se oli yleensä paitsi rekursiivista muotoa myös ääretön asteluvultaan.
- ◆ Seuraavassa rajoitutaan *äärellisen pituiseen FIR-korjaimeen*. Tälle johdetaan ensin matriisinotaation avulla *ideaalinen MMSE-ratkaisu*. Tämän pohjalta johdetaan *gradienttityyppinen iteratiivinen ratkaisumenetelmä* matriisiyhtälölle joka yksinkertaistuu aikanaan käyttökelpoiseksi *LMS(least mean square)-adaptointi-algoritmiksi*.
- ◆ LMS-algoritmi on pohjana useimmille käytännön lineaarisille ja takaisinkytketyille (DFE-)korjaimille.



- ◆ Adaptiivisen suotimen perusrakenne on **Kuvassa 11-1**.

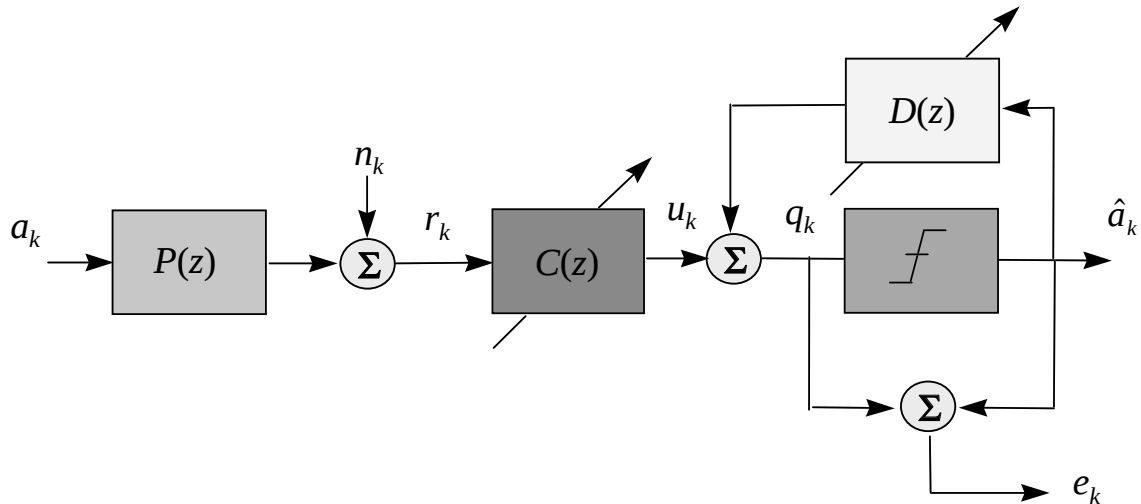
...Adaptiivisen lin. korjaimen rakenne



- ◆ alkupään vastaanottosuodatin on yleensä *alipäästösuodatin*, joka poistaa kohinaa
- ◆ adaptiivinen (lineaarinen) korjain toteutetaan yleensä *FIR-rakenteella*
- ◆ adapt. korjaimen kertoimia ohjataan *virhesignaali*lla

Virhesignaali muodostetaan

- ◆ *alustusvaiheessa* (training mode) lähettämällä tunnettu testisignaali
- ◆ *seurantavaiheessa* (tracking mode) käyttämällä hyväksi menneitä päätöksiä. Virheelliset päätökset (alle 10%) eivät juuri haittaa



- ◆ Päätöstakaisinkytkennän sisältävä kantataajuisen DFE-korjaimen diskreettiaikainen malli on perusrakenne on **Kuvassa 11-2.**

...Adaptiivisen DFE-korjaimen rakenne



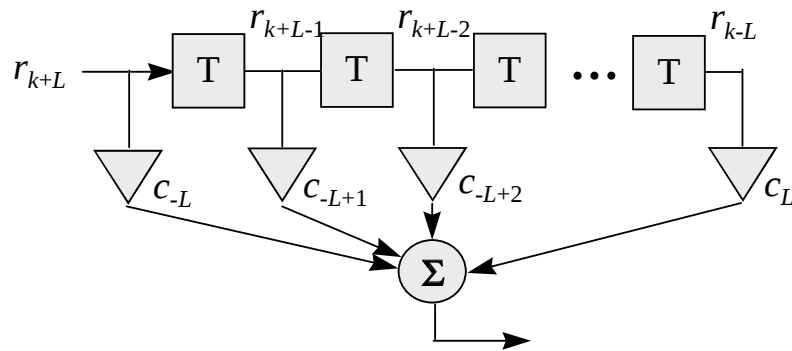
- ◆ Adaptointi perustuu virhesignaaliin missä on *alustusvaiheessa* tunnettu symbolisekvenssi ja *seurantavaiheessa* vastaanottimen päätössekvenssi.
- ◆ *Prekursorin* N -tappinen siirtofunktio on muotoa (Huom! Kanava on nyt $P(z)$ ja korjain $C(z)$)

$$C(z) = \sum_{m=-(N-1)}^0 c_m z^{-m} \quad (11.3)$$

- ◆ (käytännössä kausalisoitava N viiveellä). *Postkursori* on

$$D(z) = \sum_{m=1}^M d_m z^{-m} \quad (11.4)$$

- ◆ Tämä toteutetaan M -tappisella FIR-rakenteella.



- ◆ Johdetaan N -tappisen FIR korjaimen (11.2) MSE. Määritellään ensin kerroinvektori

$$\mathbf{c} = [c_{-L} \quad \cdots \quad c_0 \quad \cdots \quad c_L]^T \quad (11.5)$$

- ◆ missä ovat FIR-suotimen kertoimet, $L = (N-1)/2$ ja N oletetaan parittomaksi.

... FIR-korjaimen MSE-ratkaisu



- ◆ Vastaavat suodatettavat korjaimen input-näytteet hetkellä k kootaan samanmittaiseksi vektoriksi:

$$\mathbf{r}_k = [r_{k+L} \quad \cdots \quad r_k \quad \cdots \quad r_{k-L}]^T \quad (11.6)$$

- ◆ Virhesignaali saadaan muotoon

$$e_k = a_k - q_k = a_k - \mathbf{c}^T \mathbf{r}_k \quad (11.7)$$

- ◆ Yleisesti kaikki suureet ovat *kompleksi*arvoisia. Oletetaan lisäksi että kaikki signaalit ovat *nollakeskiarvoisia* ja (laajassa mielessä) *stationäärisiä* eli niiden stokastiset ominaisuudet eivät muutu ajan funktiona.



- ◆ Neliövirhe voidaan työstää muotoon (**Harjoituksissa!**)

$$\begin{aligned} E[|e_k|^2] &= E[|a_k|^2] - 2 \operatorname{Re}\{\mathbf{c}^H E[a_k \mathbf{r}_k^*]\} + \mathbf{c}^H E[\mathbf{r}_k^* \mathbf{r}_k^T] \mathbf{c} \\ &= E[|a_k|^2] - 2 \operatorname{Re}\{\mathbf{c}^H \mathbf{a}\} + \mathbf{c}^H \Phi \mathbf{c} \end{aligned} \quad (11.8)$$

- ◆ missä 'H' merkitsee *hermitointia* eli transponointia ja konjugointia. Lisäksi määritellään *ristikorrelaatiovektori*

$$\mathbf{a} = E[a_k \mathbf{r}_k^*] \quad (11.9)$$

- ◆ ja *autokorrelaatiomatriisi*

$$\Phi = E[\mathbf{r}_k \mathbf{r}_k^H] = \begin{bmatrix} \Phi_0 & \Phi_{-1} & \cdots & \Phi_{-(N-1)} \\ \Phi_1 & \Phi_0 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Phi_{N-1} & \cdots & & \Phi_0 \end{bmatrix} \quad (11.10)$$

Autokorrelaatiomatriisi



- ◆ **Autokorrelaatiomatriisilla** on tärkeitä ominaisuuksia:
- ◆ 1) on *Hermiten (hermiittinen) matriisi*, eli $\Phi^H = \Phi^{T*} = \Phi$ (Jos Φ on reaalinen, se on symmetrinen).
- ◆ 2) on *Töplitz-matriisi* eli diagonaalien suuntaisilla alidiagonaaleilla on sama elementti. *Autokorrelaatiofunktion* arvo riippuu siis vain korreloitavien viive-erosta: $\Phi_j = E[r_{k+j} r_k^*]$
- ◆ 3) on *positiivi-semidefiniitti* eli mille tahansa vektorille $\mathbf{x}$ $\mathbf{x}^H \Phi \mathbf{x}$ on positiivinen ja siten se on tulkittavissa *neliölliseksi pituusmitaksi*.



- ◆ Tarkastellaan kaavan (11.8) neliövirhelauseketta kun FIR-suotimen pituus on 1 ja signaalit ovat reaaliarvoisia. Saadaan

$$\begin{aligned} E[|e_k|^2] &= E[|a_k|^2] - 2ac + \Phi_0 c^2 \\ a &= E[a_k r_k], \quad \Phi_0 = E[r_k^2] \end{aligned} \quad (11.14)$$

- ◆ Tämä voidaan helposti täydentää muotoon

$$\begin{aligned} E[|e_k|^2] &= E[|a_k|^2] - a^2 / \Phi_0 + \Phi_0 (a^2 / \Phi_0^2 - 2ac / \Phi_0 + c^2) \\ &= E[|a_k|^2] - a^2 / \Phi_0 + \Phi_0 (c - a / \Phi_0)^2 \end{aligned}$$

- ◆ josta nähdään että MSE:n minimoiva ratkaisu on $c = a / \Phi_0$.

...Optimaalinen MMSE-ratkaisu



- ◆ Tämä yksinkertainen tulos on voidaan yleistää kompleksiseen vektoritapaukseen:

LM Harj. 11-4 Johda kertomalla auki, että

$$E[|e_k|^2] = E[|a_k|^2] - \mathbf{a}^H \Phi^{-1} \mathbf{a} + (\Phi^{-1} \mathbf{a} - \mathbf{c})^H \Phi (\Phi^{-1} \mathbf{a} - \mathbf{c}) \quad (11.15)$$

on yhtäpitävä (11.8:n kanssa).

- ◆ Koska on positiivi-semidefiniitti, kaavan (11.15) viimeinen termi on aina ei-negatiivinen eli pienimmillään nolla. Optimi-ratkaisu saadaan siis valitsemalla

$$\mathbf{x} = \Phi^{-1} \mathbf{a} - \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{c}_{\text{opt}} = \Phi^{-1} \mathbf{a} \quad (11.16)$$

- ◆ Ratkaisu (jos se on olemassa) on aina yksikäsitteinen.



- ◆ Edelläsaatu ratkaisu (11.16) minimoi lausekkeen (11.15) MSE:n, sillä muut termit eivät riipu kerroinvektorista $\mathbf{c}$. Minimi-MSE:ksi saadaan

$$\xi_{\min} = E[|a_k|^2] - \mathbf{a}^H \Phi^{-1} \mathbf{a} = E[|a_k|^2] - \mathbf{a}^H \mathbf{c}_{opt} \quad (11.17)$$

- ◆ MSE:n yleinen kaava saadaan siis muotoon

$$E[|e_k|^2] = \xi_{\min} + (\Phi^{-1} \mathbf{a} - \mathbf{c})^H \Phi (\Phi^{-1} \mathbf{a} - \mathbf{c}) \quad (11.18)$$

- ◆ MSE riippuu suoraan siitä, kuinka lähellä $\mathbf{c}$ on optimia. MSE:n kuvaaja on (*hyper*)*paraboloidi* N -ulotteisessa avaruudessa.
- ◆ Optimiratkaisu (11.16) voidaan johtaa myös *derivoimalla* MSE:n lauseke vektorin $\mathbf{c}$ suhteen ja asettamalla derivaatta nolaksi (ks. kirjan **Harj. 11-5**). Tulos on tietysti sama.

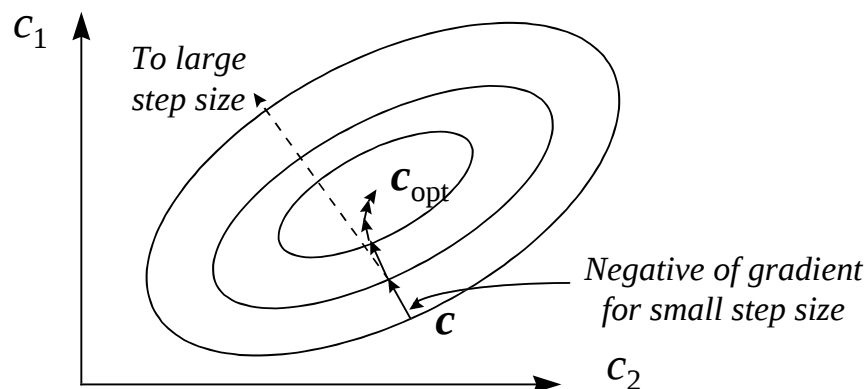
MSE-gradienttialgoritmi (LM 11.1.3)



- ◆ Kaavan (11.16) optimikerroinvektori löydetään *matriisinkäännöllä* eli ratkaisemalla lineaarinen yhtälöryhmä joka riippuu autokorrelaatiomatriisin Φ termeistä (autokorrelaatiofunktion Φ_j arvoista) ja ristikorrelaatiovektorista $\mathbf{a}$. Jos kerroinvektoria joudutaan päivittämään usein (niinkuin oletetaan), se on työläs tapa, ja lisäksi siinä voi tulla numeerisia (laskentatarkkuus-)ongelmia.
- ◆ Lisäksi autokorrelaatio- ja ristikorrelaatiotermit täytyy tuntea (tai estimoida).



- ◆ Suoran ratkaisun sijasta etsimme *iteratiivista* algoritmia, joka vähitellen lähestyy optimiratkaisua. Ratkaisu perustuu siihen perustulokseen että optimikerroinvektori on *yksikäsitteinen ja* virhepinta (MSE:n kuvaaja kerroinvektoriavaruudessa) on *unimodaalinen*, eli sillä on vain yksi globaali minimi (ei lokaaleja ääriarvoja!).
- ◆ Tällöin voidaan MSE-käyrää pitkin edetä aina negatiivisen gradientin suuntaan eli *alamäkeen* optimiratkaisua kohti.



- ◆ **Kuva 11-3** havainnollistaa gradienttialgoritmin periaatteellista toimintaa (kaksiulotteinen tapaus).



- ◆ *MSE-gradienttialgoritmi (MSEG)* voidaan esittää muodossa

$$\mathbf{c}_{j+1} = \mathbf{c}_j - \frac{\beta}{2} \nabla_{\mathbf{c}_j} E[|e_k|^2] \quad (11.27)$$

- ◆ missä $\mathbf{c}_{j+1}$ ja $\mathbf{c}_j$ ovat uusi ja vanha kerroinvektori, β on askelparametri (1/2 on mukana jotta seuraavat kaavat sievenevät) ja nablalauske on MSE-virhepinnan gradientti. Derivoimalla MSE:n lauseke saadaan (ks. kirjan **Harj. 11-5**)

$$\nabla_{\mathbf{c}_j} E[|e_k|^2] = 2\Phi\mathbf{c} - 2\mathbf{a} \quad (11.25)$$

- ◆ jolloin algoritmi (11.27) saadaan muotoon

$$\mathbf{c}_{j+1} = \mathbf{c}_j + \beta(\mathbf{a} - \Phi\mathbf{c}_j) = (\mathbf{I} - \beta\Phi)\mathbf{c}_j + \beta\mathbf{a} \quad (11.28)$$



- ◆ **Esimerkki 11-2:** tutkitaan taas *reaalista skalaaritapausta* (**Esim. 11-1**), jolloin MSEG-algoritmi saadaan muotoon

$$c_{j+1} = (1 - \beta\Phi_0)c_j + \beta a \quad (11.29)$$

- ◆ Vähennetäänpä kummaltakin puolelta optimiratkaisu c_{opt} ja käytetään kaavaa $a = \Phi_0 c_{\text{opt}}$:

$$\begin{aligned} c_{j+1} - c_{\text{opt}} &= (1 - \beta\Phi_0)c_j - c_{\text{opt}} + \beta\Phi_0 c_{\text{opt}} \\ &= (1 - \beta\Phi_0)(c_j - c_{\text{opt}}) \end{aligned} \quad (11.30a)$$

Kun oletetaan kertoimen alkuarvoksi , voidaan $(j+1)$:s ratkaisu lausua myös muodossa

$$c_{j+1} - c_{\text{opt}} = (1 - \beta\Phi_0)^j (c_0 - c_{\text{opt}}) \quad (11.30b)$$



Tästä kaavasta nähdään, että

- ◆ Ratkaisu suppenee *aina* kohti optimia (alkuarvosta riippumatta) jos

$$|1 - \beta\Phi_0| < 1$$

- ◆ Tästä seuraa *askelparametrille* vaatimus

$$-1 < \beta\Phi_0 - 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < \beta\Phi_0 < 2 \Leftrightarrow 0 < \beta < \frac{2}{\Phi_0}$$

- ◆ Nopeimmin algoritmi suppenee jos $\beta=1/\Phi_0$: tällöin tarvitaan vain yksi iteraatio!

MSEG-algoritmin suppeneminen



- ◆ Edellisen esimerkin tulos voidaan yleistää kompleksiarvoiseen vektoritapaukseen. Esitetään kaava (11.28) muodossa

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{j+1} - \mathbf{c}_{opt} &= (\mathbf{I} - \beta\Phi)\mathbf{c}_j - \mathbf{c}_{opt} + \beta\Phi\mathbf{c}_{opt} \\ &= (\mathbf{I} - \beta\Phi)(\mathbf{c}_j - \mathbf{c}_{opt}) \end{aligned}$$

- ◆ Merkitsemällä $\mathbf{q}_j = \mathbf{c}_j - \mathbf{c}_{opt}$ ja käyttämällä alkuarvoa $\mathbf{q}_0$ saadaan ratkaisu muotoon

$$\mathbf{q}_{j+1} = (\mathbf{I} - \beta\Phi)^j \mathbf{q}_0 \quad (11.32)$$

- ◆ Mutta milloin algoritmi suppenee? Nyt sen selvittäminen on hieman työläämpää kuin skalaaritapauksessa ja matriisin ominaisarvoja ja -vektoreita tarvitaan.



- ◆ Kaavan (11.32) kerroinmatriisi voidaan esittää *modaalihajotelmana*

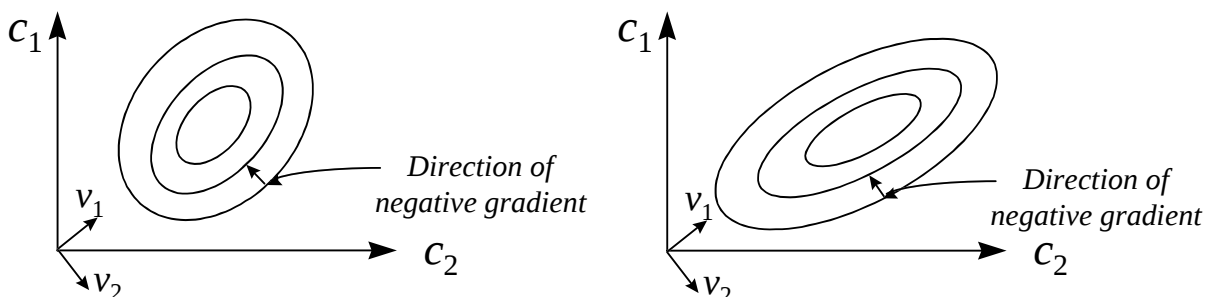
$$(\mathbf{I} - \beta\Phi)^j = \sum_{i=1}^N (1 - \beta\lambda_i)^j \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \quad (11.38)$$

- ◆ missä λ_i on matriisin Φ ominaisarvo (aina reaalinen ja ei-neg.!) ja $\mathbf{v}_i$ vastaava ominaisvektori ($\mathbf{v}_i^H \mathbf{v}_i = 1$). Termi $(1 - \beta\lambda_i)^j$ on lausekkeen (11.38) *i:s suppenemismoodi*.
- ◆ Jotta jokainen moodi suppenisi, on vaadittava että *suurinta ominaisarvoa vastaava moodi suppenee*, mistä seuraa *askelparametrin suppenemisehto*

$$0 < \beta < \frac{2}{\lambda_{\max}} \quad (11.39)$$



- ◆ Voidaan lisäksi osoittaa, että suppeneminen on hidasta kun ns. ominaisarvohaje $\lambda_{\max} / \lambda_{\min}$ (suurimman ja pienimmän ominaisarvon suhde) on suuri.
- ◆ Käytännössä suuri ominaisarvohaje ilmenee siten, että MSE-pinnan (hyper)paraboloidin poikki-pinta on litistynyt (hyper)ellipsi. Tällöin *gradienttisuunta kääntyy voimakkaasti edettäessä kohti maljan pohjaa*, jolloin on pakko käyttää pienehköä askelparametria ettei ajeta ohi. **Kuva 11-6:**





- ◆ Vieläkin havainnollisempi on spektritulkinta. Voidaan osoittaa, että *signaalin tehospektri asettaa rajat ominaisarvohajalle*:

$$\min_{\omega} [S(e^{j\omega})] < \lambda < \max_{\omega} [S(e^{j\omega})] \quad (11.45)$$

ja tehospektrihän on *autokorrelaatiofunktion Fourier-muunnos*:

$$S(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_k e^{-j\omega k} \quad (11.46)$$

- ◆ Ominaisarvot riippuvat matriisin dimensioista. Voidaan osoittaa, että ominaisarvojen minimi ja maksimi lähestyvät (11.45):n raja-arvoja kun matriisin kokoa (eli adaptoitavan suotimen pituutta) kasvatetaan.

...Ominaisarvot ja tehospektri



- ◆ Suppenemisen kannalta on siten parasta, että korjaimen input-signaalin *spektri on mahdollisimman tasainen* (lähellä valkoista kohinaa). Jos spektrissä on yksikin nollakohta, suppeneminen hidastuu periaatteessa nollaan kun suotimen pituutta kasvatetaan.
- ◆ Käytännön pohjakohinan takia tämä on lähinnä teoreettinen ongelma. Silti *pitkien suotimien adaptointi on hidasta* varsinkin kun signaalin spektri on vaihteleva.



Tällä luennolla käsiteltiin FIR-korjaimen adaptointia. Tutustuttiin mm. seuraaviin käsitteisiin

- ◆ MSE-virheen lauseke *matriisimuodossa* N -pituiselle FIR-suotimelle
- ◆ MSE-gradienttialgoritmi (MSEG)
- ◆ MSEG-algoritmin suppeneminen
- ◆ Askelparametrin määrittäminen
- ◆ Ominaisarvohaje, tehospektri ja suppeneminen