



S-38.211 Signaalinkäsittely tietoliikenteessä I Signal Processing in Communications (2 ov)

Syksy 1997

5. Luento: Kanavakorjaimet II

prof. Timo Laakso

Vastaanotto torstaisin klo 10-11

Huone G210, puh. 451 2473

Sähköposti: timo.laakso@hut.fi

Yleistetyt kanavakorjaimet (LM 10.2)



- ◆ Viimeksi käsiteltiin nollaanpakottavaa (ZF) korjainratkaisua olettaen valkaistu sovitettu suodatin (WMF) -esiaste. Seuraavassa tarkastellaan yleisempiä ratkaisuja jotka ovat lähempänä käytännön toteutusta:
- ◆ *Luovutaan kiinteästä WMF-esiasteesta.* Käytännössä WMF on hankala toteuttaa, koska se vaatii tarkan tiedon kanavasta.
- ◆ *Muutetaan optimaalisuuskriteeriä.* ISI:n ehdottoman nollaanpakotuksen sijasta sallitaan hieman ISIä jotta ZF-korjaimen pulmallista kohinavahvistusta voidaan pienentää. Sopiva käytännön kriteeri on *keskimääräinen kokonaisneliövirhe* (Mean Square Error, MSE) joka sisältää kohinan ja ISIn yhteisvaikutuksen.

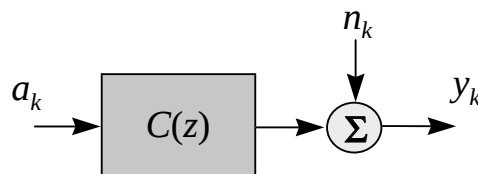


- ◆ Tarkastellaan *rajatun kompleksisuuden korjaimia*. Edellä tarkasteltiin vain yleisiä siirtofunktioita rajoittamatta niiden astelukua.
- ◆ Käytännössä korjaimet ovat yleensä *rajallisen pituisia FIR-suotimia*, koska niiden kertoimien adaptiivinen määrittäminen on helpointa käytännön järjestelmissä.

Järjestelmämalli (LM 10.2.1)



- ◆ Tarkastellaan **Kuvan 10-11** diskreettiaikaista mallia (näytteytys symbolitaajuudella):



- ◆ jossa symbolisekvenssi ja kohinasekvenssi oletetaan kompleksiarvoisiksi stokastisiksi prosesseiksi joilla on seuraavat tehospektrit:

$$S_a = A_a^2 G_a G_a^*$$

$$S_n = A_n^2 G_n G_n^*$$

ja G_a, G_n ovat minimivaiheisia kausaalisia moonisia tekijöitä.



- ◆ Kanavan (+ lähettimen pulssinmuokkauksen) siirtofunktio oletetaan jaettavaksi seuraaviin tekijöihin:

$$C(z) = C_0 z^r C_{\min} C_{\max} C_{\text{zero}}$$

- ◆ missä C_0 on vakiokerroin, z^r on viivetermi, $C_{\min}$ on mooninen, kausaalinen ja minimivaiheinen, $C_{\max}$ on mooninen, antikausalinen ja maksimivaiheinen, ja C_{zero} sisältää yksikköympyrällä sijaitsevat nollat.

Käytännön kanavan ominaisuuksia



- ◆ Käytännön kanavalla on tiettyjä fysikaalisia rajoituksia maksimivaiheisen tekijän $C_{\max}$ suhteen:
- ◆ $C_{\max}$ ei voi sisältää napoja, sillä muuten impulssivaste jatkuisi äärettömiin 'oikealle'
- ◆ $C_{\max}$ voi sisältää nollia, eli $C_{\max}$ on aina FIR-tyyppinen.



- ◆ Mobiiliradiokanavalle käytetään yleensä FIR-tyyppistä monitiekanavamallia jossa monitiepolkujen viiveet ja kompleksiset amplitudit muuttuvat (häipyvät) ajan mukana.
- ◆ Oletetaan että 2-polkuisen kanavan että monitiepolkujen viiveero on mT (T = näyteväli). Kanavan impulssivasteeksi ja siirtofunktioksi saadaan

$$c_k = c_1 \delta_k + c_2 \delta_{k-m}$$

$$C(z) = c_1 + c_2 z^{-m}$$

- ◆ Kanavan nollat voidaan ratkaista kaavasta

$$z^m = -\frac{c_2}{c_1}$$

eli jos $|c_2| > |c_1|$, kanava on *maksimivaiheinen*.

...Radiokanavan siirtofunktio



- ◆ Koska monitiepolkujen amplitudit yleensä häipyvät riippumatta toisistaan, maksimivaiheinen tilanne on täysin mahdollinen, varsinkin jos suoraan lähettimestä saapuvaa komponenttia (line-of-sight, LOS) ei näköesteeseen vuoksi ole.
- ◆ Korjaimen kannalta *maksimivaiheinen kanava on ongelma*. Koska ideaalinen ZF-korjain on kanavan käänteissiirtofunktio, se sisältää napoja yksikköympyrän ulkopuolella ja on siis epästabiili. Käytännössä tällaista korjainta voidaan vain *approksimoida* stabiililla ratkaisulla.
- ◆ Tilanteen tekee vielä hankalammaksi se, että kanava saattaa muuttua edestakaisin minimivaiheisen ja maksimivaiheisen välillä. Tällöin FIR-tyyppinen (ei-rekursiivinen) korjain on yleensä ainoa hallittavissa oleva käytännön toteutusratkaisu.



- ◆ Määritellään keskimääräinen neliövirhe (Mean square error, MSE) vastaanottimen symboliestimaatin q_k ja lähetetyn symbolin a_k arvon neliön odotusarvona:

$$\varepsilon^2 = E[|e_k|^2], \quad e_k = q_k - a_k$$

- ◆ MSE sisältää yleisesti siis sekä kohinaa että ISIä. Tämä tarkoittaa että virhetodennäköisyyttä ei voida määrittää *tarkasti* Q-funktion avulla kuten pelkän kohinan tapauksessa. Approksimaatio voidaan kuitenkin saada määrittelemällä tunnusluku

$$\gamma = \frac{a_{\min}^2}{\varepsilon^2 / 2}$$

...Neliövirhe



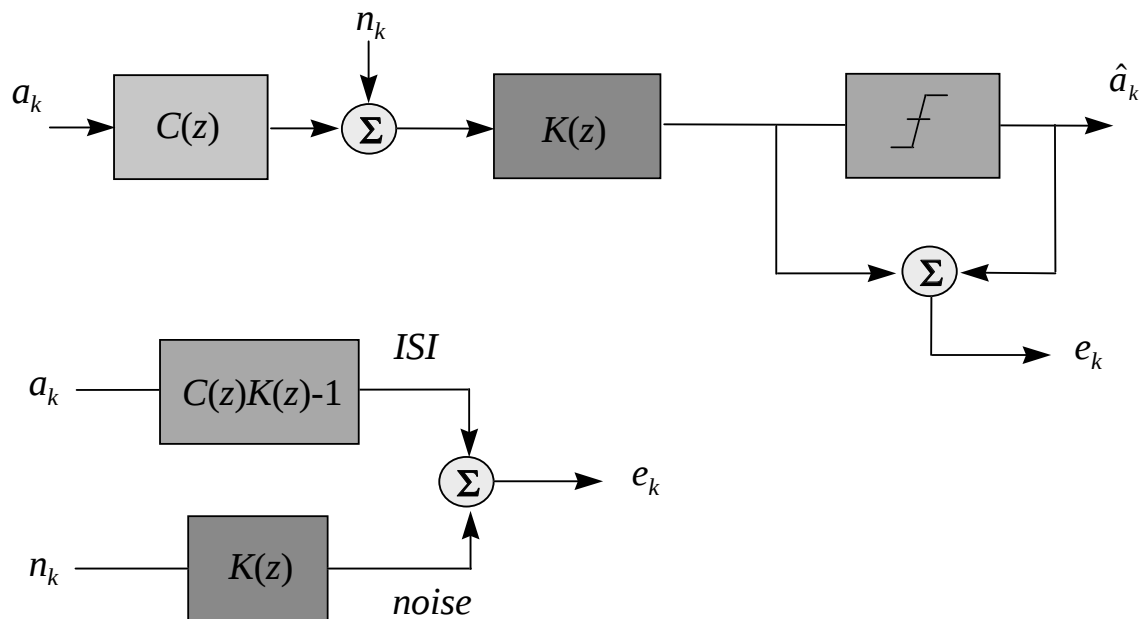
- ◆ (puolikas tulee siitä että tarvitaan reaali- tai imaginaariosan varianssi). Virhetn-estimaatti saadaan, kuten aiemmin, kaavasta

$$P_e = K \cdot Q(\sqrt{\gamma} / 2)$$

- ◆ Tämä virhetn-estimaatti perustuu siihen, että residuaali-ISIä mallitetaan additiivisena Gaussin kohinana (vaikka se on *datariippuva epälineaarinen häiriö*). Kun ISIn teho verrattuna kohinaan on pieni ja se muodostuu usean symbolin keskinäisvaikutuksen summana, approksimaatio on hyvä.



- ◆ Tarkastellaan **Kuvan 10-12** korjainrakennetta:



Lineaarinen MSE-korjain



- ◆ Virheen e_k *tehospektri* koostuu yleisesti residuaali-ISIstä ja korjaimen $K(z)$ suodattamasta kohinasta:

$$S_e(e^{j\omega}) = S_a(e^{j\omega}) |C(e^{j\omega})K(e^{j\omega}) - 1|^2 + S_n(e^{j\omega}) |K(e^{j\omega})|^2 \quad \text{eli}$$

$$S_e = S_a |CK - 1|^2 + S_n |K|^2$$

- ◆ ja MSE saadaan integroimalla tehospektri

$$\varepsilon^2 = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} S_e(e^{j\omega}) d\omega = \langle S_e \rangle_A$$

- ◆ Ennen MMSE-ratkaisun johtamista kerrataan vielä ZF-ratkaisu ja sen ominaisuudet.



- ◆ Nollaanpakottava korjain on yksinkertaisesti *kanavan käänteissiirtofunktio*:

$$K(z) = \frac{1}{C(z)} = \frac{1}{C_0 C_{\min} C_{\max} C_{\text{zero}}} \quad (10.60)$$

- ◆ Ominaisuuksia:

- $K(z)$ riippuu vain kanavasta, ei datan tai kohinan ominaisuuksista
- MSE riippuu vain kohinasta, koska ISI on nolla
- Minimivaiheinen osuus kanavasta on helppo korjata käänteissuotimella $1/C_{\min}$
- maksimivaiheisuus ja nollat johtavat ideaalisti epästabiileihin korjaintermeluihin $1/C_{\max}$ ja $1/C_{\text{zero}}$

...LE-ZF-korjain



- ◆ LE-ZF-korjaimen MSE on

$$\varepsilon_{LE-ZF}^2 = \left\langle \frac{S_n}{|C|^2} \right\rangle_A \quad (10.61)$$

joka kasvaa äärettömiin maksimivaihekanavan ja yksikköympyränollien tapauksessa.



- ◆ Yleisen LE-korjaimen virhespektri on muotoa

$$S_e = S_a |CK - 1|^2 + S_n |K|^2 \quad (10.58)$$

- ◆ MSE:n minimoiva korjain voidaan johtaa tämän kaavan avulla. Merkitsemällä (ks. Kuva 10-11)

$$S_y = S_a |C|^2 + S_n \quad (10.65)$$

- ◆ voidaan (10.58) muokata muotoon

$$S_e = S_y \left| K - \frac{S_a C^*}{S_y} \right|^2 + \frac{S_a S_n}{S_y} \quad (10.66)$$

...LE-MSE-korjain



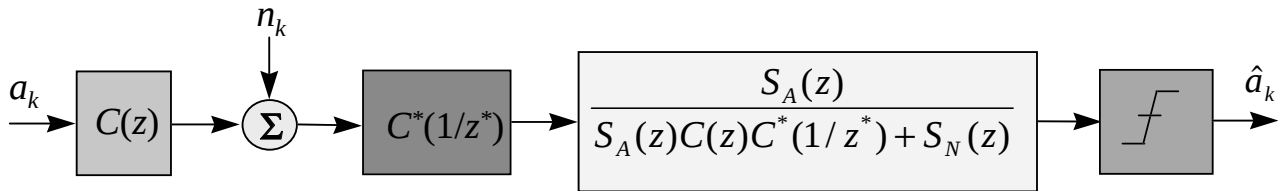
- ◆ Koska molemmat termit ovat positiivisia, millä tahansa taajuudella optimaalinen ratkaisu on se joka nolaa ensimmäisen termin. Tämä on siten myös optimaalinen MMSE (Minimum MSE) -ratkaisu, eli LE-MSE-korjaimeksi saadaan

$$K(z) = \frac{S_a C^*}{S_y} = \frac{S_a C^*}{S_a |C|^2 + S_n} = \frac{1}{C + S_n / (S_a C^*)} \quad (10.67)$$

- ◆ Tämä voidaan tulkita nimittäjän lisätermillä *modifioiduksi LE-ZF-korjaimeksi* ($K = 1/C$).



- ◆ LE-MSE:n toteutus on **Kuvan 10-13** mukainen:

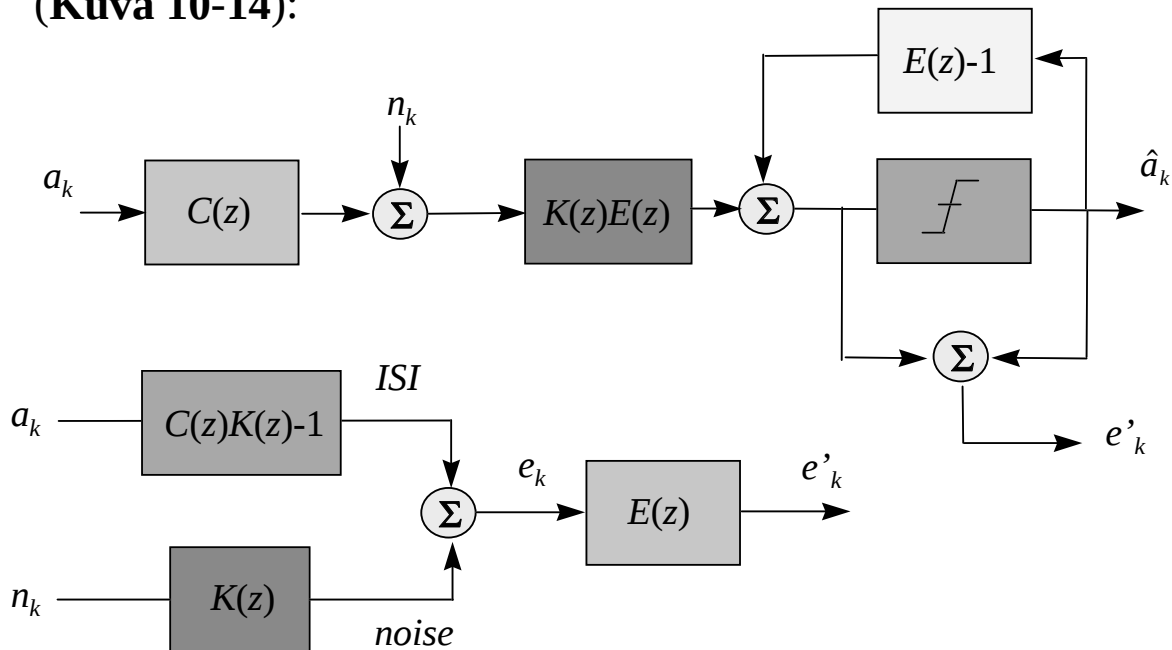


- ◆ Tekijä C^* vastaa diskreettiä sovitettua suodatinta ja se voidaan erottaa esiasteeksi. LE-MSE:n ominaispiirteitä on:
- Esiasteen jälkeinen lohko S_a/S_y on aina reaalinen ja ei-negatiivinen yksikköympyrällä
 - Jos S_a/S_y :llä on napoja, osa näistä on yksikköympyrän ulkopuolella mikä tekee tarkan toteutuksen mahdottomaksi
 - Kun kohinaspektri S_n pienenee, LE-MSE lähestyy LE-ZF-ratkaisua (kohinan merkitys vähenee ja ISIn kasvaa)
 - LE-MSE-korjaimen MSE on (vrt. (10.61)!):

$$\epsilon_{LE-MSE}^2 = \left\langle \frac{S_n}{|C|^2 + S_n / S_a} \right\rangle_A \quad (10.68)$$



- ◆ DFE-ZF-korjain voidaan johtaa mm. prediktoritulkin avulla (Kuva 10-14):



...DFE-ZF-korjain



- ◆ Prediktorisuodin $E(z)$ valkaisee virheen e_k tehosppektrin S_E . Koska prediktorisuodin määritellään lisäksi minimivaiheiseksi ja mooniseksi, se voidaan esittää muodossa

$$E(z) = \frac{1}{G_e}$$

missä G_e saadaan hajotelmasta

$$S_e = \varepsilon_{DFE}^2 G_e G_e^* \quad (10.71)$$

- ◆ Koska LE-ZF:n korjain on $K = 1/C$, virheen e_k tehosppektri on

$$S_e = \frac{S_n}{CC^*} = \frac{A_n^2 G_n G_n^*}{|C_0|^2 C_{\min} C_{\max} C_{\min}^* C_{\max}^*} \quad (10.73)$$



- ♦ Vertaamalla (10.71):a ja (10.73):a saadaan

$$G_e = \frac{G_n}{C_{\min} C_{\max}^*}$$

ja prekursorikorjain on siis

$$E(z) = \frac{1}{G_e} = \frac{C_{\min} C_{\max}^*}{G_n}$$

- ♦ Tästä saadaan *prediktiovirhesuotimen* siirtofunktio

$$K(z)E(z) = \frac{1}{CG_e} = \frac{C_{\min} C_{\max}^*}{C_0 C_{\min} C_{\max} G_n} = \frac{C_{\max}^*}{C_0 C_{\max} G_n}$$



- ♦ Havaintoja prekursorikorjaimesta:
 - $1/G_e$ on minimivaiheinen *kohinanvalkaisusuodin*
 - $C_{\max}^*/C_{\max}$ on *allpass-suodin* (amplitudivaste = 1 kaikilla taajuuksilla). Eliminoi prekursori-ISIä muuttamalla *vaihetta*, jolloin kohinankaan *amplitudi* ei kasva!
 - Jos kanava on minimivaiheinen, $C_{\max} = 1$. Jos lisäksi kohina on valkoista eli $S_e = G_e = 1$, koko prekursoria ei tarvita!
 - Kanavan maksimivaihekomponentti voi olla vain FIR-tyyppinen, muuten toteutus ei onnistu!
 - MSE:

$$\epsilon_{DFE}^2 = \left\langle S_e / |C|^2 \right\rangle_G$$



- ◆ DFE-MSE-korjain toteutetaan myös **Kuvan 10-14** rakenteella, mutta siirtofunktiot $E(z)$ ja $K(z)E(z)$ määritetään *MSE-kriteerin* mukaisesti.
- ◆ Tehdään ensin hajotelma (10.65):lle:

$$S_y = S_a |C|^2 + S_n = A_y^2 G_y G_y^* \quad (10.81)$$

$$A_y^2 = \langle S_a |C|^2 + S_n \rangle_G \quad (10.82)$$

$K(z)$:n MSE-ratkaisu on sama kuin LE-MSE:lle eli $K = S_a C^* / S_y$, jolloin virhespektri on (10.66):sta

$$S_e = \frac{S_a S_n}{S_y} = \frac{A_a^2 G_a G_a^* \cdot A_n^2 G_n G_n^*}{A_y^2 G_y G_y^*} = \epsilon_{DFE-MSE}^2 G_e G_e^*$$

...DFE-MSE-korjain



- ◆ Termejä vertaamalla saadaan ratkaistua *prediktori*

$$E(z) = \frac{1}{G_e} = \frac{G_y}{G_a G_n}$$

ja *prekursori*

$$K(z)E(z) = \frac{S_a C^*}{S_y G_e} = \frac{A_a^2 G_a G_a^*}{A_y^2 G_y G_y^*} \cdot \frac{C^* \cdot G_y}{G_a G_n} = \frac{A_a^2 G_a^*}{A_y^2 G_y^*} \cdot \frac{C^*}{G_n}$$

Lauseke on hankala, mutta onneksi tätä ei tarvita käytännön korjaimien suunnittelussa!



- ◆ Tähän asti ei ole juuri mietitty korjaimien kompleksisuutta. Kaikki diskreeteillä suotimilla toteutettavat siirtofunktiot ovat *rationaalisia*. Käytännön kanavat ovat harvoin tarkasti rationaalisia, mutta riittävän asteluvun z -rationaalipolynomilla eli äärellisen asteisella rekursiivisella (IIR-) suotimella niitä voidaan approksimoida.
- ◆ IIR-suotimien potentiaalisena ongelmana on *epästabiilisuus* (navat yksikköympyrän ulkopuolella). Edellä huomattiin, että *maksimivaiheisen* kanavan tarkka ekvalisointi voi johtaa epästabiiliin korjaimeen. Tällöin on parasta tyytyä approksimatiiviseen FIR-ratkaisuun.

...FIR-korjaimet



- ◆ Lisäksi IIR-korjaimien adaptointi tuntemattomaan tai muuttuvaan kanavaan on (ainakin nykyään tunnetuilla tekniikoilla) käytännössä *paljon* hankalampaa kuin FIR-korjaimien. Tämän vuoksi käytetään yleensä aina FIR-korjaimia niiden vaatimasta korkeammasta asteluvusta huolimatta.
- ◆ Käytännön korjainratkaisuissa *ZF-kriteerin* käyttö on kyseenalaista, sillä äärellisen asteluvun FIR-suodin (tai IIR-suodin) ei yleensä pysty poistamaan ISIä kokonaan.
- ◆ Pääsääntöisesti käytetäänkin *MMSE-kriteeriä* ja sen pohjalta johdetaan adaptiivisia FIR-tyyppisiä korjainratkaisuja kirjan luvussa 11.