



S-38.211 Signaalinkäsittely tietoliikenteessä I

Signal Processing in Communications (2 ov)

Syksy 1997

4. Luento: Kanavakorjaimet I

prof. Timo Laakso

Vastaanotto torstaisin klo 10-11

Huone G210, puh. 451 2473

Sähköposti: timo.laakso@hut.fi

Kanavakorjaimet



Tällä luennolla tutustumisen kohteena ovat

- ◆ Lineaarinen nollaanpakottava korjain (linear zero-forcing equalizer, LE-ZF)
- ◆ Takaisinkytketty nollaanpakottava korjain (decision-feedback zero-forcing equalizer, DFE-ZF)
- ◆ Tomlinson-Harashima -esikoodaus

Seuraavalla luennolla jatketaan aiheena

- ◆ Lineaarinen neliövirhekorjain (linear mean squared error equalizer, LE-MSE)
- ◆ Takaisinkytketty neliövirhekorjain (decision-feedback MSE equalizer, DFE-MSE)

Myöhemmin tarkastellaan *korjaimien adaptiivisia toteutuksia*



Tarkastellaan yleistä stabiilia rationaalista z -siirtofunktiota $H(z)$ joka voi olla esim. kanavan diskreettiaikainen malli. On usein hyödyllistä esittää se seuraavanlaisena hajotelmana

$$H(z) = B \cdot z^L \cdot H_{\min}(z) H_{\max}(z) H_{\text{zero}}(z) \quad (2.44)$$

missä

- B on vakiokerroin
- L on vakioviive,
- $H_{\min}$ on *minimivaiheinen* tekijä
- $H_{\max}$ on *maksimivaiheinen* tekijä ja
- H_{zero} sisältää yksikköympyrällä olevat nollat.

...Z-siirtofunktioista



♦ *Minimivaiheinen* tekijä on muotoa

$$H_{\min}(z) = \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}, \quad |c_k| \leq 1, \quad |d_k| < 1 \quad (2.45)$$

eli nollat ja navat ovat yksikköympyrän *sisäpuolella*.

Maksimivaiheisen tekijän nollat ja navat ovat vastaavasti yksikköympyrän *ulkopuolella*, eli

$$H_{\max}(z) = \frac{\prod_{k=1}^I (1 - f_k z)}{\prod_{k=1}^J (1 - g_k z)}, \quad |f_k| \leq 1, \quad |g_k| < 1 \quad (2.47)$$



ja yksikköympyränollatermi on muotoa

$$H_{\text{zero}}(z) = \prod_{k=1}^K (1 - e_k z), \quad |e_k| = 1 \quad (2.46)$$

- ◆ *Heijastettu siirtofunktio*: Jos sekvenssin h_k z-muunnos on muotoa

$$H(z) = Az^r \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} \quad (2.33)$$

niin sekvenssin h_{-k}^* (peilattu ja konjugoitu - tämä on kompleksiarvoisen sekvenssin sovitettu suodain!) z-muunnos on

$$H^*(1/z) = Az^{-r} \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k^* z)}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k^* z)} \quad (2.51)$$



- ◆ Z-siirtofunktioista päästään taajuustason esitykseen (spektriin) pysymällä yksikköympyrällä $z = e^{j\omega T}$ (ω kulmataajuus, T näyteväli):

$$H(e^{j\omega T}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}}$$

- ◆ *Heijastetun siirtofunktion* spektri saadaan suoraan konjugoimalla alkuperäisen sekvenssin spektri:

$$H^*(1/z^*) \Big|_{z=e^{j\omega T}} = H^*(e^{j\omega T})$$

eli pätee

$$H(z)H^*(1/z^*) \Big|_{z=e^{j\omega T}} = |H(e^{j\omega T})|^2$$



- ◆ Tarkastellaan amplitudiltaan *normaalijakautunutta* mutta *värillistä* kohinaa n_k jolla on (z -tason) tehospektri $S_n(z)$.
Tehospektri on aina ei-negatiivinen yksikköympyrällä $z=e^{j\omega}$:

$$S_n(e^{j\omega T}) = |H(e^{j\omega T})|^2$$

z -tason tehospektri voidaan *aina* esittää hajotelmana

$$S_n(z) = A_n^2 G_n(z) G_n^*(1/z^*)$$

missä A_n on skaalausvakio ja $G_n(z)$ on *minimivaiheinen*:

$$G_n(z) = \frac{\prod_{k=1}^{\infty} (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{\infty} (1 - d_k z^{-1})}, \quad |c_k| \leq 1, \quad |d_k| < 1$$

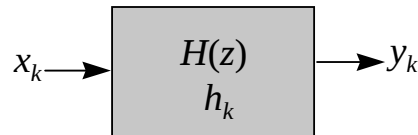
Värillinen kohina



- ◆ $G_n(z)$ on lisäksi *mooninen*, eli sen sarjakehitelmän termin z^{-0} kerroin on skaalattu ykköseksi
- ◆ $G_n(z)$:n *navat ja nollat* ovat yksikköympyrän sisällä ja suodinta vastaava stabiili impulssivaste on *kausaalinen*. $G_n^*(1/z^*)$:n stabiili impulssivaste on tämän peilikuva ja siis *antikausaalinen*. Yksikköympyrällä pätee lisäksi

$$S_n(e^{j\omega}) = |A_n G_n(e^{j\omega})|^2$$

- ◆ Oletetaan että nollia ei ole yksikköympyrällä. Tällöin myös $1/G_n(z)$ on kausaalinen ja stabiili.



- ◆ Kun diskreetti signaali x_k (tehospektri $S_x(z)$) suodatetaan lineaarisella suotimella $H(z)$ (impulssivaste h_k), suotimen ulostulon spektri on

$$S_y(z) = H(z)H^*(1/z^*)S_x(z)$$

$$S_y(e^{j\omega T}) = |H(e^{j\omega T})|^2 S_x(e^{j\omega T})$$

- ◆ Kun halutaan muokata signaalin tehospektriä, on löydettävä (jokin) siirtofunktio $H(z)$ joka johtaa haluttuun spektriin
- ◆ Lyhennysmerkintä: $H(z)H^*(1/z^*) \equiv |H(z)|^2$

Valkaistu sovitettu suodatin



- ◆ Suoritetaan edellä käsitellyn värillisen kohinasekvenssin n_k *valkaisu*: Suodatetaan minimivaiheisella tekijällä $1/A_n G_n$:lla
- ◆ Suodatetun kohinan $n1_k$ tehospektriksi saadaan

$$S_{n1}(e^{j\omega T}) = \left| \frac{1}{A_n G_n(e^{j\omega T})} \right|^2 S_n(e^{j\omega T}) = \frac{S_n(e^{j\omega T})}{|A_n G_n(e^{j\omega T})|^2} = 1$$

- ◆ Spektri on siis vakio eli kohina on *valkoista*, niinkuin pitikin.



- ◆ Oletetaan että värillisen kohinan kanavassa lähetetään signaalsekvenssi x_k . Signaalin spektri on kohinanvalkaisu-suodatuksen jälkeen

$$\frac{X(z)}{A_n G_n(z)}$$

- ◆ Koska signaali on nyt valkaistussa kohinassa, optimaalinen ML-vastaanottosuodin (yhdelta pulssille) on *sovitettu suodatin*. Tämän impulssivaste saadaan peilaamalla (ja konjugoimalla), ja sitä vastaa *konjugaattispektri*:

$$\frac{X^*(1/z^*)}{A_z^* G_z^*(1/z^*)}$$



- ◆ Toteutuksessa suotimet voidaan *yhdistää*:

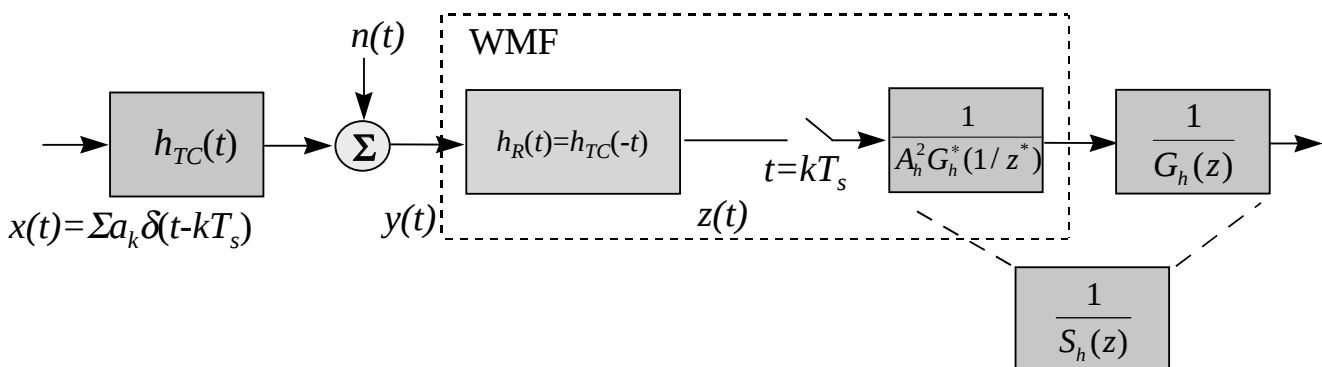
$$\frac{1}{A_n G_n(z)} \cdot \frac{X^*(1/z^*)}{A_n^* G_n^*(1/z^*)} = \frac{X^*(1/z^*)}{S_n(z)}$$

- ◆ eli sovitettu suodatin normalisoidaan kohinan tehospektrillä. Tämä on haluttu *valkaistu sovitettu suodatin* (Whitened Matched Filter, WMF)
- ◆ WMF:ää voidaan käyttää paitsi Viterbi-algoritmin myös korjaimien esiasteena



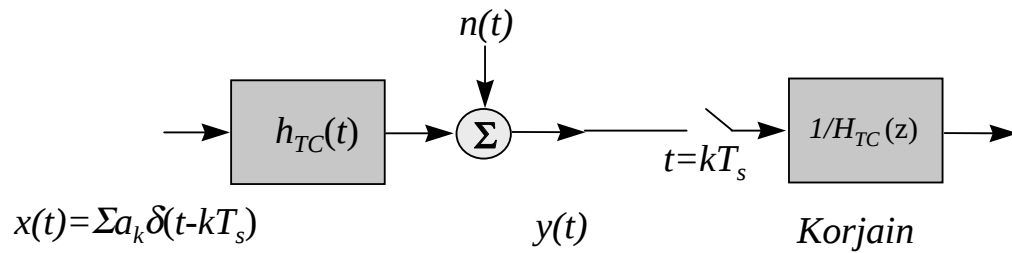
- ◆ Nollaanpakottavan korjaimen idea on yksinkertainen: valitaan sellainen vastaanottosuodatin joka kumoaa kanavan aiheuttaman lineaarisen vääristymän ja *pakottaa keskinäisvaikutuksen nollaksi*
- ◆ Suodattimessa voidaan käyttää WMF-suodinta esiasteena, tai olla käyttämättä. Katsotaan molemmat tapaukset.
- ◆ Oletukset:
 - diskreetti signaali (näytteytys symbolitaajuudella)
 - ekvivalentti diskreetti kanava on kausaalinen
 - ekvivalentti diskreetti kohina on valkoista Gaussin kohinaa

...Nollaanpakottava korjain



Kuvan rakenne (LM 10-3:n mukaan) sisältää

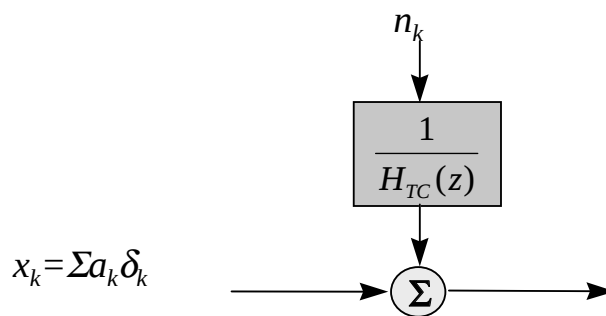
- ◆ yhdistetyn lähetys- ja kanavasuotimen $h_{TC}(t) = h_T(t) * c(t)$
- ◆ AWGN-kohinalähteen $n(t)$
- ◆ sovitetun suotimen $h_R(t) = h_{TC}(-t)$
- ◆ diskreetin valkaisusuotimen $1 / A_h^2 G_h^*(1/z^*)$
- ◆ kanavakorjaimen (jälkiosan) $1 / G_h(z)$



Edellinen kuva on sekava, koska WMF-esiaste sotkee asioita!

Tässä yksinkertaisempi rakennekuva, jossa on:

- ◆ yhdistetty lähetys- ja kanvasuodin $h_{TC}(t) = h_T(t) * c(t)$
- ◆ AWGN-kohinalähde $n(t)$
- ◆ kanavakorjain $1/H_{TC}(z)$, joka on näytteistetyn lähetys- ja kanvasuotimen *käänteissuodin*



Molemmat edelliset osittain jatkuva-aikaiset järjestelmämallit voidaan pelkistää ylläolevan diskreettiin malliin (modifioitu kuvasta LM 10-3) joka sisältää

- ◆ diskreetin AWGN-kohinalähteen n_k
- ◆ kohinanvärjälähteen $1/H_{TC}(z)$, joka on suoraan korjaimen siirtofunktio



- ◆ Korjaimen lähdössä signaalinäytteet ovat samat kuin lähettimessä (ei ISIä). Kohinaspektri on sensijaan muuttunut:

$$S_v(z) = \frac{N_0}{S_h(z)} = \frac{N_0}{|H_{TC}(z)|^2}$$

(Huom. tässä reaaliarvoinen kohina toisin kuin kirjassa => kakkonen häviää)

- ◆ Mitä tapahtuu kun lähetin-kanavan taajuusvasteessa on nollia (tai muuten vaan voimakasta vaimennusta)?
- ◆ Lineaarisen nollaanpakottavan korjaimen ongelma on juuri *kohinan vahvistuminen*

Esimerkki LM 10-5



- ◆ Tarkastellaan jatkuva-aikaista vastaanotettua pulssia

$$h_{TC}(t) = \sigma_h \sqrt{2a} e^{-at} u(t)$$

Esimerkistä 7-10. Diskreetin sekvenssin *autokorrelaatiofunktio*ksi saadaan

$$\rho_h(k) = \sigma_h^2 \alpha^{|k|}, \quad \alpha = e^{-aT}$$

- ◆ Tämän z-muunnoksella saadaan pulssin *tehospektri*ksi

$$S_h(z) = |H_{TC}(z)|^2 = \frac{\sigma_h^2 (1 - \alpha^2)}{(1 - \alpha z^{-1})(1 - \alpha z)}$$



- ◆ Käänteissuotimen tehospektri on siis

$$S_h^{-1}(z) = \frac{(1 - \alpha z^{-1})(1 - \alpha z)}{\sigma_h^2(1 - \alpha^2)} = \frac{1 + \alpha^2 - \alpha(z^{-1} + z)}{\sigma_h^2(1 - \alpha^2)} \quad (10.32)$$

- ◆ Kohinan varianssi saadaan tehospektrin integraalina (= aritm. keskiarvo!)

$$\sigma_v^2 = N_0 \langle S_h^{-1}(z) \rangle_A = \frac{N_0}{\sigma_h^2} \cdot \frac{1 + \alpha^2}{1 - \alpha^2}$$

- ◆ Mitä tapahtuu kun parametri α lähestyy ykköstä?

Esimerkki LM 10-6



- ◆ Nyt oletetaan kanavassa vääristyneeksi pulssimuodoksi $h_{TC}(t) = h_0(t) + \alpha h_0(t - T)$ (Esimerkistä 7-11). Nyt kanava on kaksitappinen FIR ja sen tehospektri on

$$S_h(z) = \frac{(1 + \alpha z^{-1})(1 + \alpha z)}{\sigma_h^2(1 + \alpha^2)}$$

eli edellisen kanavan *käänteisarvo*. Käänteissuotimen tehospektri on nyt muotoa

$$S_h^{-1}(z) = \frac{1 + \alpha^2}{\sigma_h^2} \cdot \frac{1}{(1 + \alpha z^{-1})(1 + \alpha z)}$$

(HUOM! Kirjan kaavassa merkkivirhe!) Kohinan varianssi on:

$$\sigma_v^2 = N_0 \langle S_h^{-1}(z) \rangle_A = \frac{N_0}{\sigma_h^2} \cdot \frac{1 + \alpha^2}{1 - \alpha^2}$$

- ◆ Eli sama kuin edellä! Johtopäätökset?
- ◆ Napa tai nolla kanavassa yhtä haitallinen korjaimen kannalta!



- ◆ Edellä tarkasteltiin lineaarista nollaanpakottavaa korjainta. Sen perusongelma on *kohinavahvistus* joka johtuu tarvittavasta käänteissiirtofunktiosta (rekursiivinen osa)
- ◆ Uuden rakenteen löytämiseksi muokataan rekursiivista osaa seuraavasti:

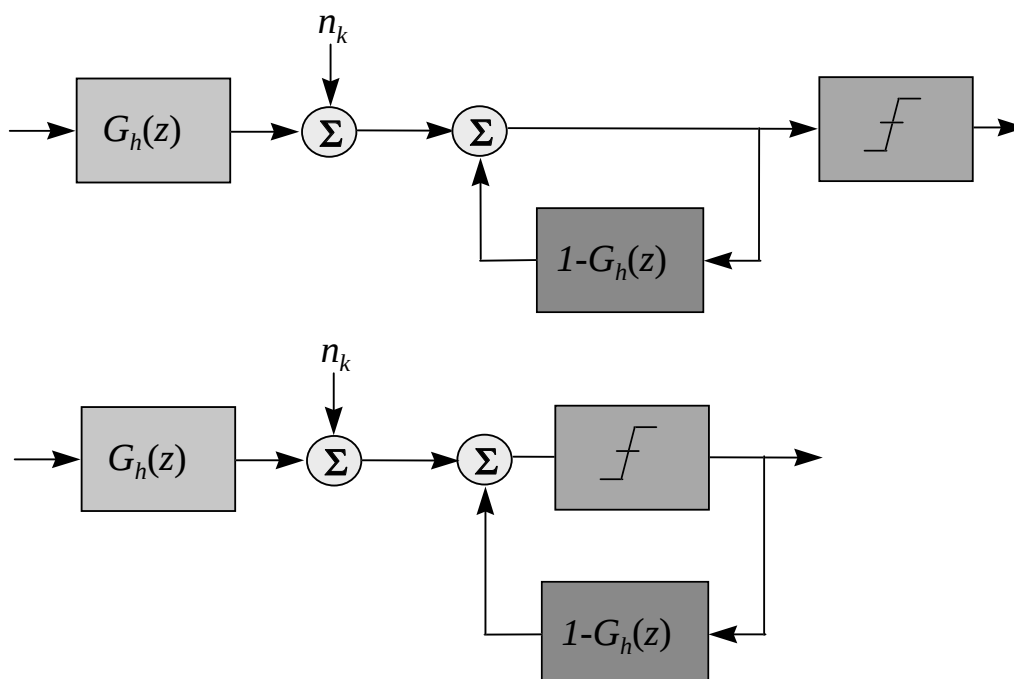
$$\frac{1}{G_h(z)} = \frac{1}{1 - (1 - G_h(z))}$$

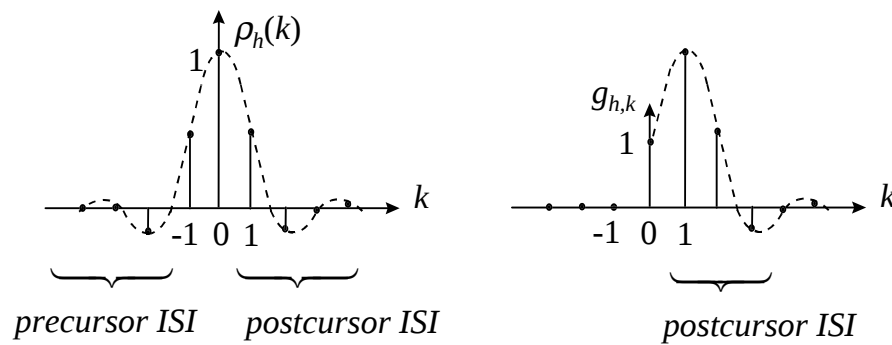
- ◆ Tämä voidaan toteuttaa takaisinkytkentärakenteella jonka takaisinkytkentäsilmissä on siirtofunktio $(1 - G_h(z))$.
- ◆ Modifioitu rakenne on esitetty **Kuvassa 10-4a**:

...Päätöstakaisinkytketty korjain



- ◆ **LM Kuva 10-4(a,b):** Päätöstakaisinkytketyn korjaimen johto





- ◆ Kuvan 10-4a rakennetta voidaan tulkita niin että ensimmäinen lohko suodattaa tulevia symbolinäytteitä ja poistaa niistä ISIä (*precursor ISI*, “esi-ISI”). Jälkimmäinen lohko poistaa vanhojen symbolien aiheuttamaa ISIä (*postcursor ISI*, “jälki-ISI”) - ja vahvistaa samalla kohinaa!



- ◆ Postcursor-osa perustaa ISIn poiston precursor-osan antamiin “pehmeisiin päätöksiin” jotka sisältävät kohinaa => kokeillaan päätöksenteon varhentamista takaisinkytkentäsilmutkan sisälle!
 - Rakenne on stabiili ja kausaalinen koska $G_h(z)$ on *minimivaiheinen* (kun ei nollia yksikköympyrällä).
 - Ei viiveetöntä takaisinkytkentäsilmutkaa, koska $G_h(z)$ on *mooninen* ja $(1 - G_h(z))$ sisältää siten aina yhden viiveen



- ◆ Saatu rakenne on päätöstakaisinkytketty korjain (Decision-Feedback Equalizer, DFE), jonka perusidean esitti Austin 1967 (ks. **Kuva 10-4b**)
- ◆ DFE-ZF:n toiminta:
 - Kohinaton tapaus: ei muutosta lin. korjaimen toimintaan
 - Kohinainen tapaus: päätöksenteko leikkaa kohinan ja eliminoi sen vahvistumisen takaisinkytkentäsilmissä



- ◆ DFE-rakenteen suorituskky määräytyy päätöksenteon inputin kohinatehosta, joka on sama kuin precursor-osan (WMF) ulostulokohina:

$$\sigma_v^2 = N_0 A_h^2$$

- ◆ DFE-korjain sijoittuu suorituskyyvyltään lineaarisen korjaimen ja Viterbi-ilmaisimen (MLSD) väliin. Toteutus ei ole juuri LE-korjainta monimutkaisempi mutta suorituskky on lähellä MLSD:tä



- ◆ Edellinen tarkastelu pätee tarkasti ottaen vain sillä oletuksella, että kaikki päätökset ovat oikeita ja takaisinkytkentäosa poistaa postcursor-ISIn ideaalisesti.
- ◆ Jos virheitä sattuu, virheet etenevät ja aiheuttavat uusia virheitä - loputtomiin????
- ◆ Voidaan osoittaa (LM Appendix 10-A), että virheiden eteneminen loppuu aina kun tehdään N (rekursion asteluku) oikeaa päätöstä peräkkäin, ja että näin tapahtuu keskimäärin K symbolin kuluessa. K :n keskimääräiseksi arvoksi voidaan johtaa

$$K = 2(2^N - 1)$$

...Virheiden eteneminen



- ◆ Keskimääräiseksi virhetodennäköisyydeksi saadaan tällöin

$$P_e = 2^N P_{e,0}$$

- ◆ eli verrattuna ideaaliseen tilanteeseen (virheen etenemistä ei huomioida) virhetn on 2^N -kertainen. Pienillä N :n arvoilla tällä ei ole suurta merkitystä.

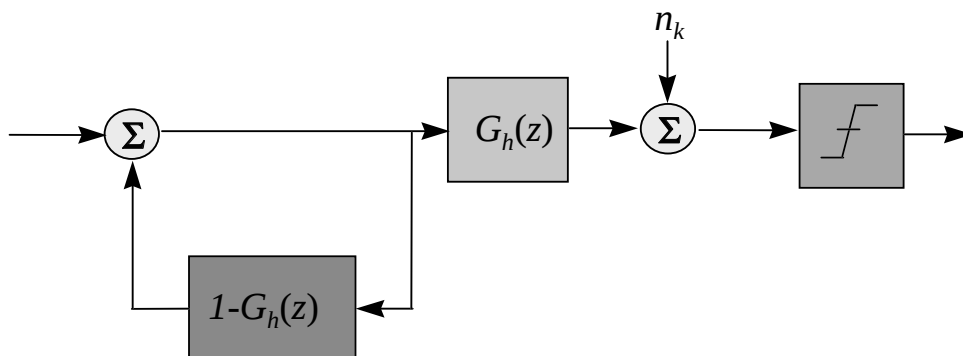


- ◆ DFE-korjain on käytössä monissa sovelluksissa, mm. modeemeissa, koska se parantaa selvästi lineaarisen korjaimen suorituskykyä minimaalisin lisäkustannuksin. Kun virheiden eteneminen voidaan pitää kurissa (riittävän lyhyt rekursiosuodatin ja pieni virhetn), sen käyttö on varteenotettava vaihtoehto.
- ◆ On kuitenkin syytä huomata, että DFE vaatii *välittömät* päätökset takaisinkytkentäsilmissä. Tämä estää käytännöllisesti katsoen kokonaan virheenkorjaavan koodauksen käytön, sillä koodauksen purku vaatii yleensä usean symbolijakson viiveen. Kun DFE:tä käytetään, pitää siis pitää huoli siitä että sillä aikaansaatu symbolivirhetn on riittävä - koodauksella sitä ei enää voi parantaa.

Tomlinson-Harashima -esikoodaus



- ◆ Ilman virheiden etenemistä ja koodausongelmia DFE olisi ihanteellinen korjain. Miten nämä ongelmat voitaisiin poistaa?
- ◆ *Ratkaisu:* siirretään rekursiivinen osa *lähettimeen* jossa on virheetön tieto lähetettävistä symboleista (**LM Fig. 10-9a**):





Esikoodauksen etuja:

- ◆ Kun oletetaan WMF-esiaste, vastaanottimen päätöksenteossa kohina on valkoista ja kohinavahvistus on poissa. Tämä johtuu siitä että tarvittava signaalin esikorostus tehdään jo lähettimessä *ennen* kuin kohina summautuu kanavaan
- ◆ Ei virheiden etenemistä => pienempi virhetn kuin DFE:llä

Uusia ongelmia:

- ◆ Esikorjaimen kertoimet (jotka riippuvat kanavasta) on estimoitava vastaanottimessa ja lähetettävä lähettimeen
- ◆ Esisuodatus yleensä kasvattaa signaalin amplitudia => vaadittava lähetysteho kasvaa!

TH -esikoodauksen toteutus



- ◆ TH-esikoodauksen lähetysteho-ongelma voidaan ratkaista *modulo-koodauksella* (tarkemmin kirjassa LM ss. 460-464)

TH-esikoodaus sopii käytettäväksi kun

- ◆ kanava muuttuu riittävän hitaasti (estimointi ja lertoimien lähetys mahdollista)
- ◆ halutaan parantaa DFE:n suorituskykyä virheenkorjaavalla koodauksella

Yksi esimerkki TH-esikoodauksen soveltamisesta ovat V.34-tyyppiset *puhelinverkon modeemit*. Niissä on esikoodauksen lisäksi käytössä *adaptiivinen lineaarinen korjain* vastaanottimen puolella, joka seuraa nopeita kanavan vaihteluita.