



S-38.211 Signaalinkäsittely tietoliikenteessä I

Signal Processing in Communications (2 ov)

Syksy 1997

2. Luento: Pulssinmuokkaussuodatus

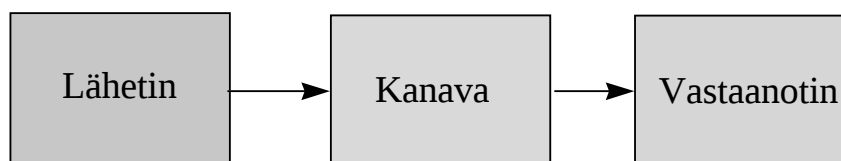
prof. Timo Laakso

Vastaanotto torstaisin klo 10-11

Huone G210, puh. 451 2473

Sähköposti: timo.laakso@hut.fi

Digitaalinen siirtojärjestelmä



- ◆ Tavoite: digitaalisen informaation siirto minimivirhein
- ◆ Lähetettävä signaali pitää valita kanavan ominaisuudet huomioiden
- ◆ Tärkeimmät kanavaparametrit:
 - kaistanleveys
 - signaalin vaimennus ja vääristymä (siirtofunkio)
 - kohina ja häiriöt



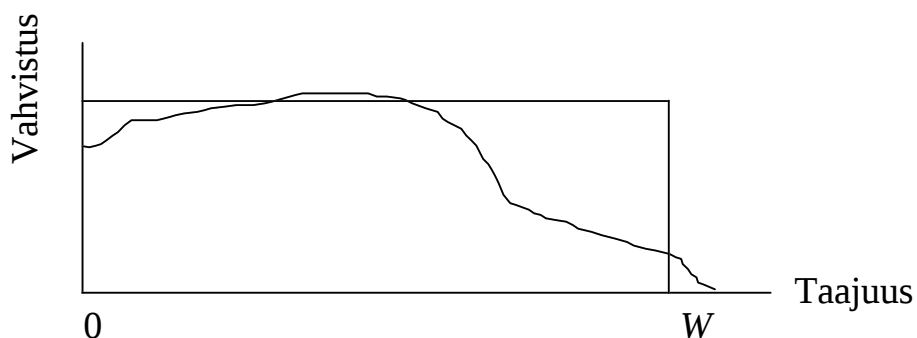
- ◆ Kupariparikaapeli (puhelinjohdot)
- ◆ Koaksiaalikaapelit
- ◆ Optiset kuidut
- ◆ Maanpäälliset radioyhteydet
 - kiinteät
 - matkapuhelinjärjestelmät
- ◆ Satelliittiradioyhteydet
- ◆ Yhdistelmäkanavat (eri kanavien yhdistelmät esim. yhdellä puhelinyhteydellä)

Kanavan ominaisuuksia



KAISTARAJOITUS:

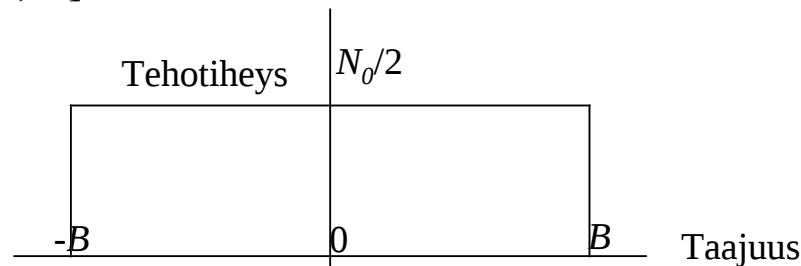
- ◆ käytännön kanavien vaimennus riippuu yleensä taajuudesta
- ◆ aiheuttaa aaltomuodon dispersiota (=suodatus)
- ◆ käytännön järjestelmissä käytetty kaista määritelty standardein





SUMMAUTUVA KOHINA:

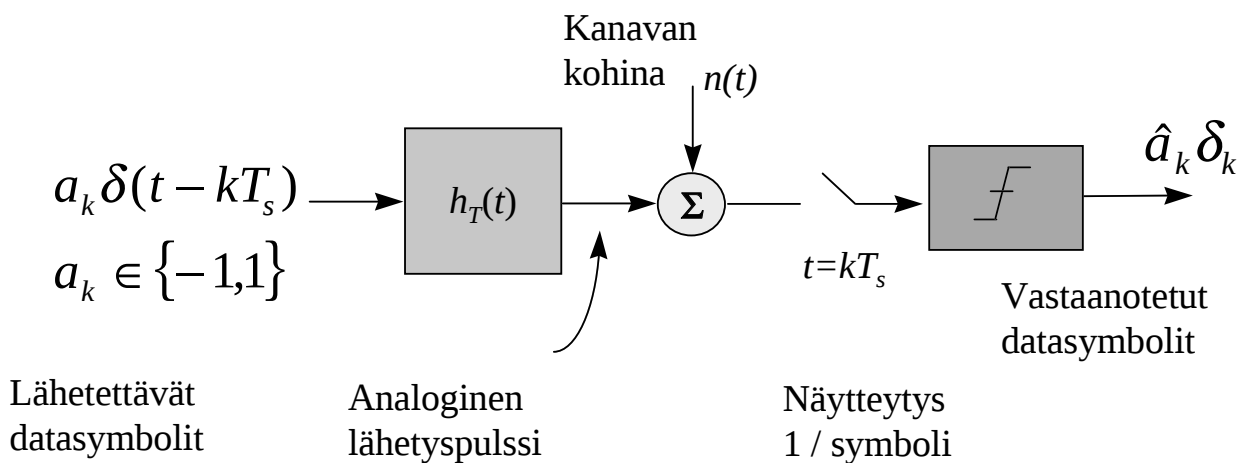
- ◆ lämpökohina (elektroniikan vastuskomponentit)
- ◆ muiden käyttäjien ja järjestelmien häiriöt
- ◆ muut häiriöt (teholähteet, impulssihäiriöt releistä, salamat, radiokanavan häiriöt, moottorit jne.)
- ◆ malli: summautuva normaalijakautunut eli Gaussin kohina (additive white Gaussian noise, AWGN), kaistarajoitettu välille $[-B, B]$



Kaistarajoitettujen lähetyspulssien suunnittelu



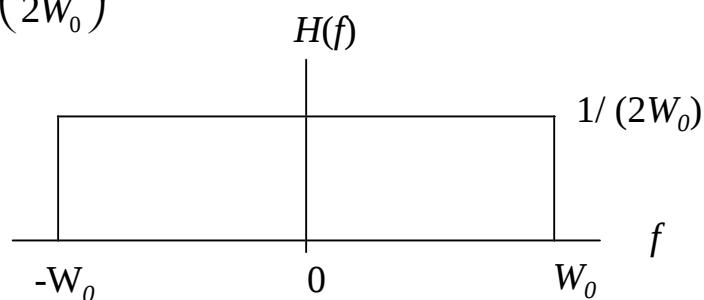
- ◆ Tarkastellaan seuraavaa yksinkertaista siirtojärjestelmää:





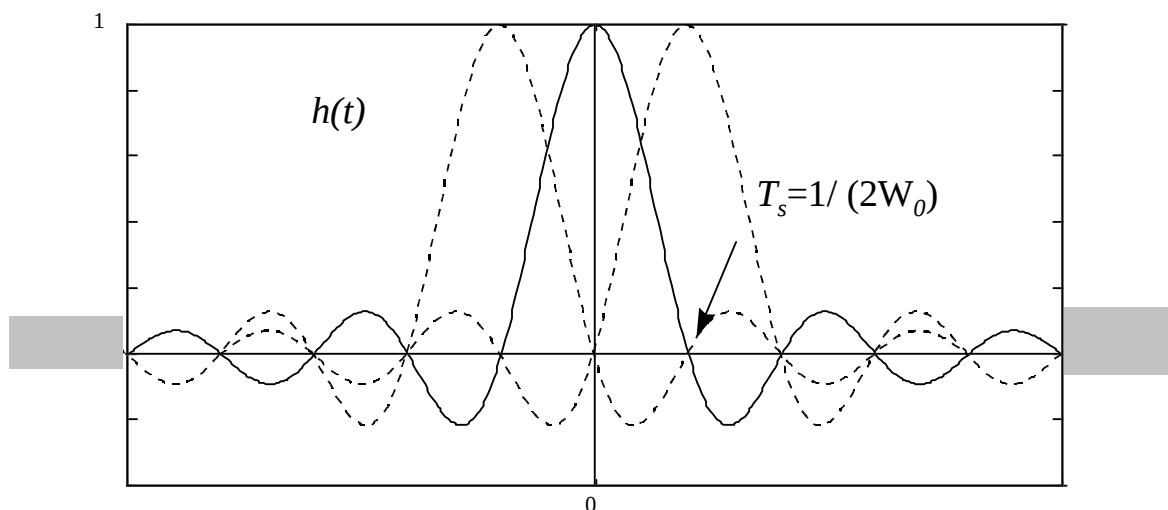
- ◆ Jotta siirtokanavan kapasiteetti saadaan käytettyä tarkkaan hyväksi, lähetysteho kannattaa jakaa tasaisesti eri taajuuksille (tarkempi tarkastelu myöhemmin kurssissa!)
- ◆ Ideaalinen lähetysignaalin tehospektri (kantataajuudella):

$$H(f) = \frac{1}{2W_0} \text{rect}\left(\frac{f}{2W_0}\right)$$



- ◆ Ideaalinen aika-alueen pulssimuoto:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi ft} df = \frac{1}{2W_0} \int_{-W_0}^{W_0} e^{j2\pi ft} df = \text{sinc}(2W_0 t)$$





- ◆ Ideaalisella sinc-funktiolla $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$ on nollat kohdissa $t = kT_s$ paitsi kun $k=0$ (pulssin huippu)
- ◆ Siirtonopeudella $R_s = 1/T_s = 2W_0$ ei pulssien keskinäisvaikutusta (*intersymbol interference, ISI*) kun näytteet otetaan tarkasti nollakohdista!
- ◆ Ongelmia:
 - jyrkkä taajuusvaste hankala toteuttaa
 - hitaasti vaimeneva pulssimuoto
 - => herkkyys ajastusvirheille
 - => katkaisuvirheet käytännön toteutuksissa



- ◆ Käytännöllisempi aaltomuoto: sallitaan lisäkaistaa (*excess bandwidth*) pulssispektrille jotta päästään vähemmän jyrkkään spektriin ja nopeammin vaimenevaan aaltomuotoon
- ◆ Ongelma: kuinka pulssispektri $H(f)$ on valittava jotta keskinäisvaikutus saadaan nollassi?
- ◆ Vastaus: *Nyquistin kriteeri!*



- ◆ Tavoitteena nolla-ISI
- ◆ Vaatimus lähetettävälle pulssimuodolle:

$$h(kT_s) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

- ◆ Yhtäpitävä formulointi:

$$h(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) = \delta(t)$$

...Nyquistin kriteeri



- ◆ Otetaan puolittain Fourier-muunnos aika-alueen kriteeristä:

$$h(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) = \delta(t)$$

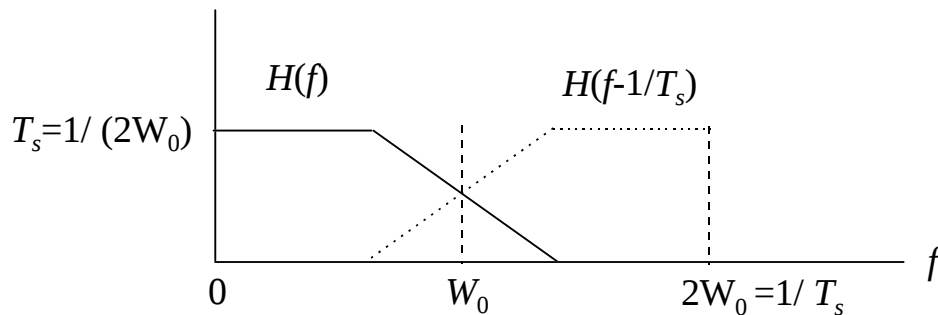
$$\Leftrightarrow H(f) * \frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f - m / T_s) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} H(f - m / T_s) = 1$$



- ◆ Kun spektri on kaistarajoitettu $W < 2W_0 = 1/T_s$, saadaan

$$H(f) + H(f - 1/T_s) = T_s$$



Nostettu kosinispektri



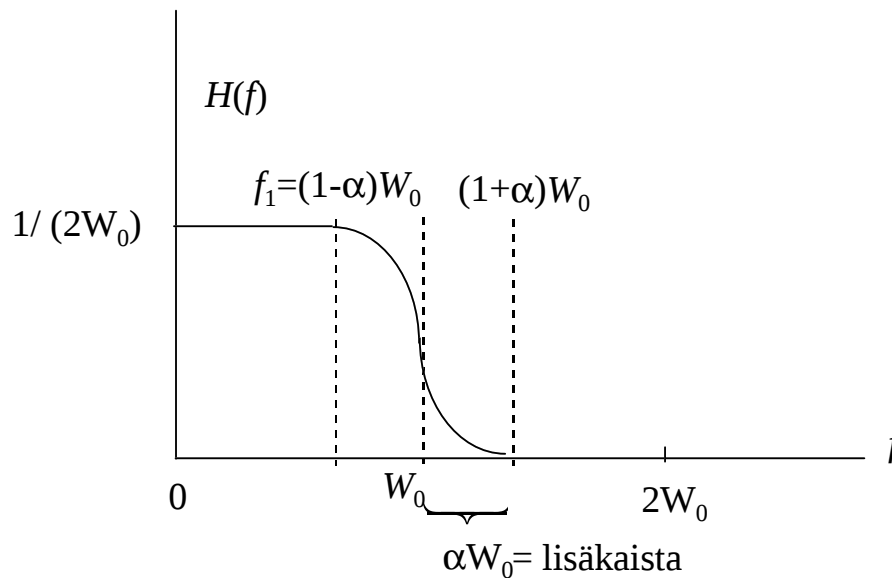
- ◆ Nyquistin kriteeri ei määrittele pulssimuotoa yksikäsitteisesti => toteutusnäkökohdat voidaan huomioida suunnittelussa
- ◆ Standardivalinta: *nostettu kosinispektri (raised-cosine spectrum)*:

$$H(f) = \begin{cases} 1/(2W_0), & |f| < f_1 \\ \frac{1}{4W_0} \left\{ 1 + \cos \left[\frac{\pi(|f| - f_1)}{2W_0 - f_1} \right] \right\}, & f_1 < |f| < 2W_0 - f_1 \\ 0, & |f| > 2W_0 - f_1 \end{cases}$$

missä $f_1 = (1 - \alpha)W_0$



- ◆ α on lisäkaistakerroin (*rolloff factor*) joka määrittää lisäkaistan (*excess bandwidth*) suuruuden

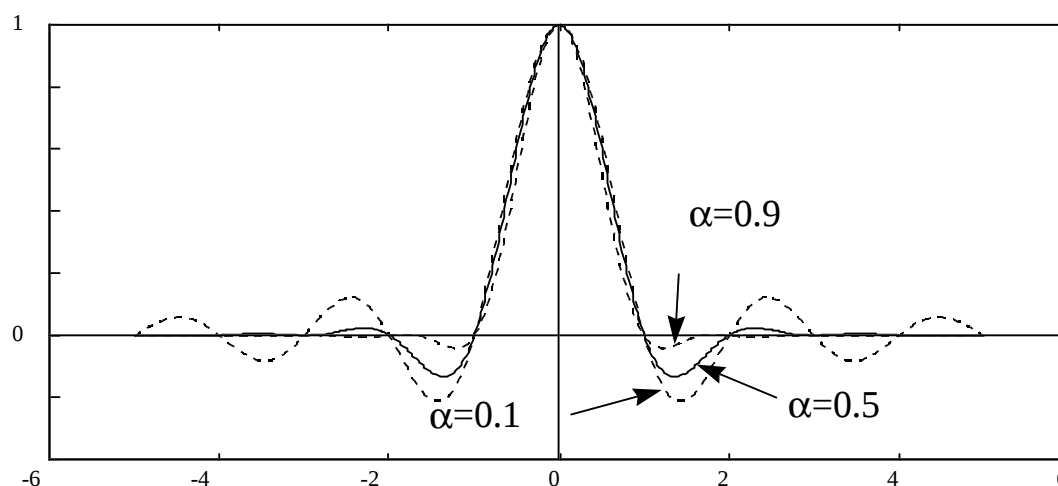


Nostetun kosinispektrin aaltomuoto



- ◆ Kuten sinc-pulssille, aika-alueen aaltomuoto saadaan käänteisellä Fourier-muunnoksella (IFT):

$$h(t) = \text{sinc}(2W_0 t) \frac{\cos(2\pi\alpha W_0 t)}{1 - (4\alpha W_0 t)^2}$$



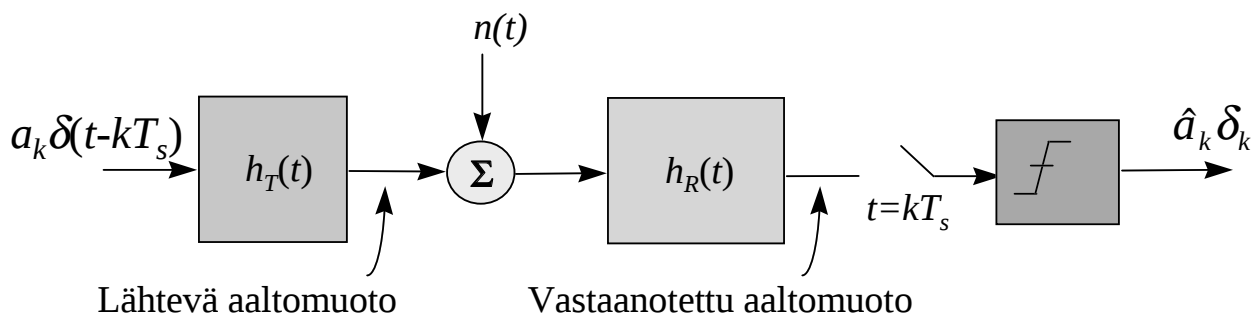


- ◆ Pulssi vaimenee verrannollisena $1/t^3$ ja $1/\alpha^2$
- ◆ Lisäkaistakertoimen α suurentaminen
 - käyttää enemmän spektriä
 - nopeuttaa pulssin vaimenemista ($\alpha = 0$: sinc-pulssi)
- ◆ Tyypillisiä arvoja: $\alpha = 0.1 \dots 0.5$
- ◆ Käytännön toteutus:
 - otetaan pulssista L näytettä symbolia kohden T_s ($L > 1$, L kokonaisluku)
 - katkaistaan pulssisuodin 'keskeltä' sopivaan pituuteen ja kausaloidaan viiveellä ($\Rightarrow$ spektri muuttuu, nolla-ISI-ominaisuus pysyy)

Sovitettu suodatin



- ◆ Parannetaan siirtoyhteyden mallia: otetaan mukaan vastaanottosuodatin $h_R(t)$
- ◆ Mahdollistaa kohinan ym. häiriöiden suodattamisen vastaanottopäässä





- ◆ Vastaanottimen bittivirhesuhde (bit error rate, BER) riippuu suoraan signaali-kohinasuhteesta (signal-to-noise ratio, SNR) (olettaen WGN-kanava, ei ISIä): $P_e = Q(\sqrt{SNR})$
- ◆ BER voidaan minimoida *maksimoimalla SNR* näytehetkellä
- ◆ *Sovitettu suodin* (Matched filter, MF) *maksimoi SNR:n* annetulle lähetyspulssimuodolle näytehetkellä



- ◆ Suunnitellaan optimaalinen vastaanottosuodin $h_R(t)$ annetulle lähetysuotimelle $h_T(t)$
- ◆ Vastaanotettu aaltomuoto (ilman kohinaa):

$$h(t) = h_T(t) * h_R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H_T(f) H_R(f) e^{j2\pi ft} df$$

- ◆ Symbolienergia näytehetkellä $t=0$:

$$|h(0)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} H_T(f) H_R(f) df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df$$

- ◆ käytetään *Schwarzin epäyhtälöä*!



- ◆ Keskimääräinen kohinateho vastaanottimen lähdössä:

$$E[n^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(f) df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df$$

- ◆ Signaali-kohinasuhde (SNR):

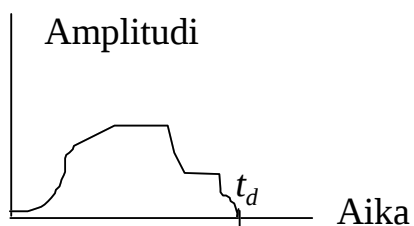
$$\begin{aligned} SNR &= \frac{|h(0)|^2}{E[n^2(t)]} \leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df} \\ &= \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 df = SNR_{MAX} \end{aligned}$$



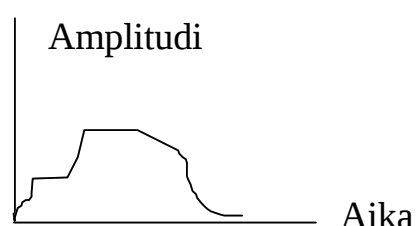
- ◆ Maksimi-SNR saavutetaan kun

$$H_R(f) = H_T^*(f) \Leftrightarrow h_R(t) = h_T(-t)$$

- ◆ Kausaalinen toteutus: $h_R(t) = h_T(t_d - t)$



Lähetys-suodin



SOVITETTU vastaanottosuodin



Oletetaan *AWGN-kanava*

- 1) Lähetetään yksi pulssi jonka energia E_s , ei vastaanottosuodatusta:

$$SNR = \frac{E_s}{N_0}$$

- 2) Lähetetään pulssi jonka energia on E_s ja käytetään sovitettua suodatinta vastaanotossa:

$$SNR = \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f)|^2 df = \frac{2E_s}{N_0}$$

- ◆ Sovitettu suodatin *kaksinkertaistaa* SNR:n!

Lähetys- ja vastaanottopulssien valinta



- ◆ Vastaanotettu kokonaispulssi:

$$h(t) = h_T(t) * h_R(t) = h_T(t) * h_T(-t)$$

$$H(f) = H_T(f) H_T^*(f) = |H_T(f)|^2$$

- ◆ Suotimen jako lähettimen ja vastaanottimen kesken:

- 1) Valitaan positiivinen ja symmetrinen $H(f)$
- 2) Määritetään $H_T(f) = H_R(f) = \sqrt{H(f)}$
- 3) Lasketaan $h_T(t) = h_R(t)$ IFT:n avulla
- 4) Näytteytetään, katkaistaan ja kausaloidaan



- ◆ Juuri-Nyquist (tai Puoli-Nyquist; Root-Nyquist/Half-Nyquist) suodin yhdistää
 - Nyquist-aaltomuodon (nolla-ISI)
 - sovitetun suotimen (maximi-SNR)
- ◆ Ositus samanlaisiin suotimiin lähetys- ja vastaanottopäähän
- ◆ Esimerkki: juurikosinisuodin (Root-Raised-Cosine, RRC)



- ◆ Juurikosinisuotimen spektri: otetaan neliöjuuri nostetusta kosinispektristä:

$$H_T(f) = \begin{cases} 1/\sqrt{2W_0}, & |f| < f_1 \\ \frac{1}{\sqrt{4W_0}} \sqrt{1 + \cos\left[\frac{\pi(|f| - f_1)}{2W_0 - f_1}\right]}, & f_1 < |f| < 2W_0 - f_1 \\ 0, & |f| > 2W_0 - f_1 \end{cases}$$

missä $f_1 = (1 - \alpha)W_0$

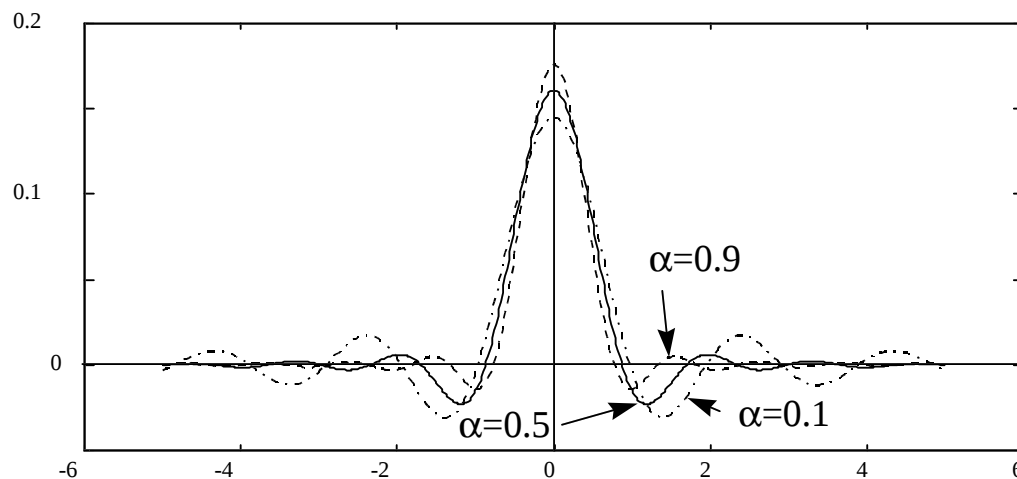


Juurikosinisuotimen aaltomuoto saadaan jälleen IFT:n avulla (työläs laskettava!):

$$r(t) = \frac{\sqrt{T_s}}{\pi t} \sin(2\pi(1-\alpha)W_0 t) + \frac{\sqrt{T_s}}{(2\pi t)^2 - \left(\frac{\pi}{4\alpha W_0}\right)^2} \left[(4\pi t) \sin(2\pi(\alpha-1)W_0 t) - \left(\frac{\pi}{2\alpha W_0}\right) \cos(2\pi(\alpha+1)W_0 t) \right]$$



◆ Juurikosinisuotimen aaltomuotoja eri α :n arvoilla:





- ◆ HUOMAA:
Juurikosinisuotimella *ei* yleisesti ole nollakohtia symbolivälein $t=kT_s$!
- ◆ Käytännön toteutus: näytteytä, katkaise, kausalo
- ◆ Ropleemi: katkaisuvirheet aiheuttavat ISIä (konvoluutio!)
=> Suotimen pituus valittava riittävän suureksi

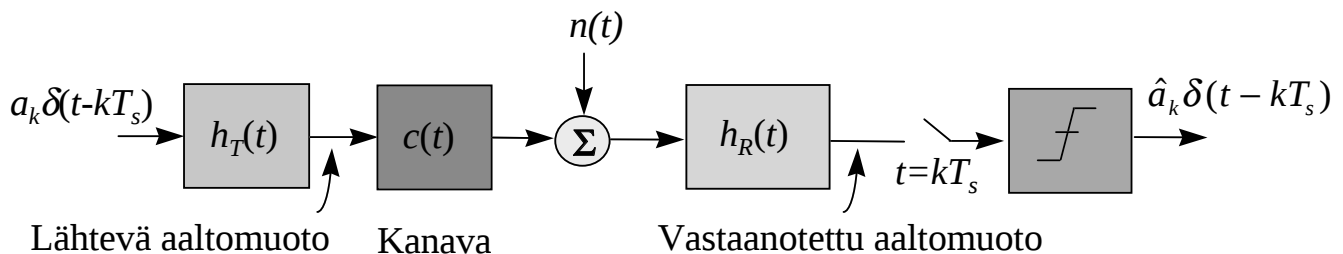
Sovitettu suodatin lineaarisessa kanavassa



- ◆ MF-suodin maksimoi signaali-kohinasuhteen annetulle lähetyspulssille AWGN-kanavassa
- ◆ Käytännön kanava kuitenkin sisältää yleensä *lineaarista* vääristymää!
- ◆ AWGN-kanavassa johdettu sovitettu suodatin voidaan yleistää *lineaariseen kanavaan* (jossa myös summautuvaa valkoista Gaussin kohinaa)



- ◆ Täydennetty siirtojärjestelmän malli
- ◆ Sisältää lineaarisen aikainvariantin kanavan jonka impulssivaste on $c(t)$ ja taajuusvaste $C(f)$



- ◆ Vastaanotettu aaltomuoto:

$$h(t) = h_T(t) * c(t) * h_R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H_T(f) C(f) H_R(f) e^{j2\pi ft} df$$

- ◆ Symbolienergia näytehetkellä $t=0$:

$$|h(0)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} H_T(f) C(f) H_R(f) df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |H_T(f) C(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df$$

- ◆ Kanava voidaan ajatella yhdistetyksi lähetyssuotimeen:

$$H_T'(f) = H_T(f) C(f) \text{ eli } h_T'(t) = h_T(t) * c(t)$$



- ◆ Vastaavaan tapaan kuin AWGN-kanavassa saadaan SNR:n maksimoiva ratkaisu

$$H_R(f) = H_T^*(f)C^*(f)$$

$$\Leftrightarrow h_R(t) = h_T(-t) * c(-t)$$

- ◆ Kausaalinen toteutus:

$$h_{R,caus}(t) = h_R(t - t_d)$$



Ongelmia:

- ◆ Yleensä lineaarinen *kanava ei ole tunnettu* vastaanottimessa
=> suodinta vaikea suunnitella etukäteen
- ◆ Sovitettu suodin *maksimoi yhden pulssin SNR:n* mutta ei huomioi lineaarisen kanavan aiheuttamaa pulssien *keskinäisvaikutusta (ISIä)*
=> ei johda hyvään (saati sitten optimaaliseen!) BERiin jatkuvassa siirtoyhteydessä!



Tulevissa luennoissa perehdytään tarkemmin lineaarisen vastaanottimiin lineaarisessa kanavassa, mm.:

- ◆ Optimaalinen *lineaarinen* vastaanotin: minimoidaan ISIn ja kohinan tehollisarvo (MMSE-korjaimet ja niiden adaptiiviset toteutukset)
- ◆ Optimaalinen vastaanotin lin. kanavassa (min BER) on *epälineaarinen* ja voidaan toteuttaa *Viterbi-algoritmillä*
- ◆ Viterbi-algoritmi vaatii valkoisen kohinan prosessin
=> määritellään *valkaistu sovitettu suodatin*
(whitened matched filter, WMF)