

Teoria

- Johdanto simulointiin
- Simuloinnin kulku – prosessin realisaatioiden tuottaminen
- Satunnaismuuttujan arvonta annetusta jakaumasta
- Tulosten keruu ja analyysi
- Varianssinreduktiotekniikoista

Varianssinreduktiotekniikat

- Simulointi on yleensä paljon aikaa / laskentatyötä vaativa tekniikka
- Jos näytteenottoa voidaan jollakin tavoin muuttaa siten, että näytteen varianssi pienenee,
 - saadaan tarkempi estimaatti tietyllä toistojen määrällä
 - tietyn tarkkuuden saavuttamiseen tarvittava toistojen määrä pienenee (kääntäen verrannollisesti varianssin reduktioon eli hajonnan reduktion neliöön)
- Tällaisia menetelmiä kutsutaan varianssinreduktiotekniikoiksi
 - ovat arvokkaita edellyttäen, ettei tekniikan soveltaminen itsessään tuo merkittävää lisää laskentatyöhön
- Varianssinreduktiotekniikoissa
 - käytetään älykkyyttä
 - hyödynnetään tunnettuja tuloksia / tietoa systeemistä

sellaisten havaintojen tuottamiseksi, joissa vaihtelua on vähemmän

Varianssinreduktiotekniikoita

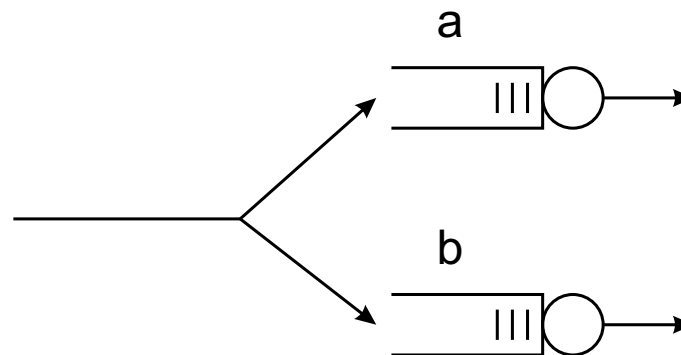
- Yhteisten satunnaislukusekvenssien käyttö
- Antiteettiset muuttujat
- Kontrollimuuttujat
- Ehdollistaminen – tunnettujen keskiarvojen käyttö
- Importance sampling (liittyy lähinnä staattiseen simulointiin; ei käsitellä tässä)
- RESTART

VAROITUS

- Varianssinreduktiotekniikoiden virheellinen käyttö saattaa johtaa toivottuun nähden vastakkaiseen tulokseen eli varianssin kasvuun

Yhteisten satunnaislukusekvenssien käyttö

- Tulee kysymykseen vertailtaessa kahden samankaltaisen systeemin suorituskykyä
- Tyypillisessä tapauksessa tutkitaan systeemin käyttäytymistä kahden eri ohjaus- tai toimintapolitiikan A ja B välillä, esim.
 - jonojärjestelmän käyttäytyminen kahdella eri skedulointipolitiikalla:
 - esim. mikä on ero keskimääräisessä odotusajassa kuvan esittämässä kahden jonon järjestelmässä, kun saapuvat asiakkaat ohjataan jonoihin a ja b
 - A) vuorotellen
 - B) satunnaisesti, 50% todennäköisyydellä joko jonoon a tai b



Yhteisten satunnaislukusekvenssien käyttö (jatkoa)

- Kiinnostavaa on jonkin suorituskykyysuureen X odotusarvojen ero näiden kahden politiikan välillä

$$\Delta\mu = \mu_A - \mu_B = E[X^A] - E[X^B]$$

missä X^A ja X^B tarkoittavat satunnaismuuttujaa X kyseisten politiikkojen vallitessa ja

$$\mu_A = E[X^A] \quad \mu_B = E[X^B]$$

- Erotuksen $\Delta\mu$ estimoimiseksi on edullista tutkia järjestelmän käyttäytymistä politiikoilla A ja B käyttäen täsmälleen samoja saapumisprosessien realisaatioita
 - jos politiikkaa A simuloitaessa esiintyy saapumisryöppy, niin sama ryöppy esiintyy myös politiikkaa B simuloitaessa
 - eroa ei näinollen pääse muodostumaan simuloinneissa satunnaisesti poikkeavista saapumisprosesseista, vaan ainoastaan politiikkojen eroista

Yhteisten satunnaislukusekvenssien käyttö (jatkoa)

- Simuloinneissa, jotka toistetaan n kertaa saadaan otokset

$$\begin{cases} X_1^A, X_2^A, X_3^A, \dots, X_n^A \\ X_1^B, X_2^B, X_3^B, \dots, X_n^B \end{cases}$$

- Poliitikalla A otoskeskiarvo ja otosvarianssi ovat

$$\bar{X}_A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^A \quad S_A^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i^A - \bar{X}_A)^2$$

ja vastaavat kaavat pätevät poliitikalle B

- Erotukselle $\Delta\mu$ saadaan estimaattori

$$\Delta\hat{\mu} = \bar{X}_A - \bar{X}_B$$

jonka varianssi on

$$V[\Delta\hat{\mu}] = V[\bar{X}_A] + V[\bar{X}_B] - 2\text{Cov}[\bar{X}_A, \bar{X}_B]$$

Yhteisten satunnaislukusekvenssien käyttö (jatkoa)

- Otoksen $X_1^A, X_2^A, X_3^A, \dots, X_n^A$ näytteet ovat toisistaan riippumattomia, samoin otoksen $X_1^B, X_2^B, X_3^B, \dots, X_n^B$ näytteet
- Samoja realisaatioita käytettäessä kuitenkin näytteet X_i^A ja $X_i^B, i = 1 \dots n$, ovat korreloituneita
 - korrelaatio on positiivinen, koska samat saapumisryöpyt esiintyvät kummassakin simuloinnissa
 - vastaavasti otoskeskiarvot $\bar{X}_A$ ja $\bar{X}_B$ ovat positiivisesti korreloituneita
 - estimaattorin varianssi on pienempi kuin käytettäessä riippumattomia saapumisprosesseja politiikoilla A ja B
- Estimaattorin varianssin estimaattori on

$$\frac{1}{n}(S_A^2 + S_B^2 - 2S_{AB}^2)$$

missä S_{AB} on otoskovarianssi

$$S_{AB}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i^A - \bar{X}_A)(X_i^B - \bar{X}_B)$$

Yhteisten satunnaislukusekvenssien käyttö (jatkoa)

- Triviaalissa erikoistapauksessa, jossa politiikat A ja B ovat samoja, yhteisten satunnaislukujen käyttö johtaa erotuksen tarkkaan estimaattoriin $\Delta\hat{\mu} = 0$
 - eri satunnaisluvulla estimaattori on yleensä $\neq 0$

Vertailtaessa kahden järjestelmän suorituskykyä simuloinnit kannattaa tehdä niin identtisissä olosuhteissa kuin mahdollista

- Yhteisten satunnaislukujen käytöllä on pieni vaikutus simulointiohjelman toteutukseen
 - esim. vertailtaessa FIFO- ja LIFO-politiikkoja, palveluaikojen arvonta on suoritettava saapumishetkellä, kun riippumattomien simulointien tapauksessa on vapaus arpoa ajat vasta palvelun alkamishetkellä

Antiteettiset muuttujat

- Tehtävänä on estimoida suureen X odotusarvo $\mu = E[X]$
- Perusidea: tehdään kaksi eri ajoa siten, että toisen ajon “pienet” havaittavat arvot muuttuvat “suuriksi” arvoiksi toisessa ajossa ja päinvastoin; käytetään näiden keskiarvoa estimaattorina
- Olkoon X eräessä kokeessa havaittu tutkitun satunnaismuuttujan arvo
- Olkoon Y erään toisen kokeen tulos, joka noudattaa samaa jakaumaa
- Tällöin $Z = \frac{1}{2}(X + Y)$ on satunnaismuuttuja, jolla on sama odotusarvo kuin X :llä

$$\mu = E[Z]$$

- Z :n varianssi on

$$\begin{aligned} V[Z] &= \frac{1}{4}(V[X] + V[Y] + 2\text{Cov}[X, Y]) \\ &= \frac{1}{2}(V[X] + \text{Cov}[X, Y]) \end{aligned}$$

- Jos X ja Y ovat negatiivisesti korreloituneita, $\text{Cov}[X, Y] < 0$, niin Z :n varianssi on pienempi kuin X :n ja Y :n ollessa riippumattomia ($\frac{1}{2}V[X]$)

Antiteettiset muuttujat (jatkoa)

- Olkoon X :n jakaumafunktio $F(x)$ ja X :n arvot generoitu käänteisfunktiointelmällä

$$X = F^{-1}(U)$$

missä $U \sim U(0, 1)$ (tasainen jakauma)

- Tällöin Y , joka generoidaan kaavalla

$$Y = F^{-1}(1 - U)$$

noudattaa samaa jakaumaa kuin X

– kun $U \sim U(0, 1)$ niin myös $1 - U \sim U(0, 1)$

- On selvää, että X ja Y ovat negatiivisesti korreloituneita
 - jos U saa pienen (≈ 0) arvon, niin $1 - U$ saa suuren arvon (≈ 1)
 - X ja Y saavat arvot jakauman vastakkaisista reunoista
- X ja Y muodostavat *antiteettisen satunnaismuuttujaparin*

Antiteettiset muuttujat (jatkoa)

Esimerkki

- Olkoon $X \sim \text{Exp}(1)$ eli

$$X = -\log U \quad Y = -\log(1 - U)$$

- Voidaan osoittaa, että tässä tapauksessa $\text{Cov}[X, Y] = 1 - \pi^2/6 = -0.645$
- Varianssi pienenee 64 %:lla riippumattomien muuttujien tapaukseen nähden (eikä maksa mitään!)
- Jos X :n odotusarvo halutaan estimoida simuloimalla
 - missä ei tietenkään tämän esimerkin tapauksessa ole järkeä
 - kannattaa jokaisen arvotun satunnaisluvun U_i jälkeen käyttää toisena satunnaislukuna arvoa $1 - U_i$

Antiteettiset muuttujat (jatkoa)

Esimerkki (jatkoa)

i	X_i	Y_i	Z_i
1	2.3340	0.1019	1.2180
2	0.0569	2.8945	1.4757
3	1.1121	0.3988	0.7554
4	0.1235	2.1527	1.1381
5	2.2724	0.1088	1.1906
6	2.0813	0.1333	1.1073
7	0.4510	1.0132	0.7321
8	2.2548	0.1108	1.1828
9	0.1761	1.8231	0.9996
10	0.8221	0.5789	0.7005

Otoskeskiarvot

$\bar{X}$	$\bar{Y}$	$\bar{Z}$
1.1684	0.9316	1.0500

Otosvarianssit

S_X^2	S_Y^2	S_Z^2
0.9489	1.0256	0.0634

Antiteettiset muuttujat (jatkoa)

- Toistokokeessa voidaan generoida arvoja $X_1, X_2, \dots$ riippumattomilla tasajakautuneilla satunnaisluvulla $U_1, U_2, \dots$
 - $X_1, X_2, \dots$ ovat riippumattomia
- Vastaavasti generoidaan sekvenssi arvoja $Y_1, Y_2, \dots$ riippumattomilla tasajakautuneilla satunnaisluvulla $1 - U_1, 1 - U_2, \dots$
 - $Y_1, Y_2, \dots$ ovat riippumattomia
- Tällöin myös arvot $Z_i = (X_i + Y_i)/2$, $i = 1, 2, \dots$ ovat riippumattomia
- Kussakin parissa X_i ja Y_i ovat negatiivisesti korreloituneita
- Z_i :n varianssi pienempi kuin riippumattomilla muuttujilla X_i ja Y_i
- Vastaavasti estimaattorin

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$$

varianssi on pienempi kuin riippumattomien muuttujien tapauksessa.

Antiteettiset muuttujat (jatkoa)

- Systeemin simuloinnissa sekvenssejä $U_1, U_2, \dots$ ja $1 - U_1, 1 - U_2, \dots$ on käytettävä eri ajoissa “samaan tarkoitukseen”
 - esim. palveluaikojen generointiin
 - synkronointi vaatii huolellisuutta ohjelman toteutuksessa
- Varianssin reduktion suuruutta on edeltäkäsinkin vaikea arvioida
 - käytännössä asiaa täytyy tutkia testiajojen avulla
- Antiteettisten muuttujien tekniikan käytöstä aiheutuva laskennallinen kustannus on kuitenkin lähes olematon, joten menetelmää kannattaa kokeilla

Kontrollimuuttujat

- Kontrollimuuttujien tekniikassa idea on tavallaan vastakkainen antiteettisiin muuttujiin nähden: menetelmässä pyritään hyödyntämään (vahvaa) positiivista korrelaatiota tutkittavan suureen X ja jonkin apusuureen Y , ns. kontrollimuuttujan välillä
- Olennaista on, että *kontrollimuuttujan Y tarkka odotusarvo $\nu = E[Y]$ oletetaan tunnetuksi*
- Tehtävänä on jälleen arvioida odotusarvo $\mu = E[X]$
- Simuloinnista mitataan sekä X :n että Y :n arvot
- Näiden avulla muodostetaan varsinainen havaittava suure

$$Z = X - (Y - \nu)$$

jonka odotusarvo on

$$E[Z] = E[X] - (E[Y] - \nu) = \mu$$

- Havaitsemalla toistetuissa simuloinneissa Z :n arvoja saadaan näiden keskiarvona harhaton estimaatti μ :lle

Kontrollimuuttujat (jatkoa)

- Z :n varianssi on

$$V[Z] = V[X - Y] = V[X] + V[Y] - 2\text{Cov}[X, Y]$$

- Varianssi on pienempi kuin X :llä edellyttäen, että korrelaatio on kyllin vahva

$$\text{Cov}[X, Y] > V[Y]/2$$

Kontrollimuuttujat: esimerkki

- Tarkastellaan M/M/1-jonoa, joka hetkellä $t = 0$ on tyhjä
- Olkoon X sadan ensimmäisen saapuvan asiakkaan odotusaikojen keskiarvo
- Otetaan kontrollimuuttujaksi Y 99 ensimmäisen asiakkaan keskimääräinen palveluaika
 - 100:n asiakkaan palveluajalla ei ole vaikutusta X :ään, joten se kannattaa jättää pois
 - Y :n odotusarvo $\nu = E[Y]$ eli keskimääräinen palveluaika on tunnettu, kun palveluaikajakauma on annettu
- Jos palveluajat ovat (sattuvat olemaan) pitkiä, niin myös odotusaikojen voi otaksua muodostuvan pitkiksi
 - voidaan siis olettaa, että X ja Y ovat positiivisesti korreloituneita
- Y on otaksuttavasti hyvä kontrollimuuttuja
 - toimivuutta pitää testata käytännön kokein
 - voi huonossa tapauksessa johtaa jopa varianssin kasvuun

Kontrollimuuttujat: parannettu versio

- Parempaan tulokseen päästään sisällyttämällä Z :n määritelmään vapaa kerroin a

$$Z = X - a(Y - \nu)$$

- Jälleen pätee $E[Z] = \mu$
- Parametri a määrätään siten, että Z :n varianssi minimoituu
- Optimaalinen a :n arvo a^* on

$$a^* = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{V[Y]}$$

- Minimoitu varianssi on

$$V[Z] = V[X] - \frac{\text{Cov}[X, Y]^2}{V[Y]} = (1 - \rho_{X,Y}^2)V[X]$$

missä

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{(V[X]V[Y])^{1/2}}$$

on X :n ja Y :n korrelaatiokerroin

Kontrollimuuttujat: parannettu versio

- Parannetussa versiossa havaittavan muuttujan Z varianssi on aina pienempi (tai korkeintaan yhtäsuuri) kuin X :n varianssi
- Korrelaation ei myöskään tarvitse olla positiivinen
 - negatiivisen korrelaation tapauksessa korjaustermi merkki muuttuu, ts. $a < 0$
- Optimaalisen a :n laskemista varten tarvitaan sekä $V[Y]$ että $\text{Cov}[X, Y]$
 - näiden arvoja ei yleensä tunneta edeltäkäs
 - arvot on estimoitava valmistelemissa simulointikokeissa mitatun otosvarianssin ja otosko-varianssin avulla

$$S_Y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}{n - 1} \quad S_{X,Y}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{n - 1}$$
$$a^* \approx \frac{S_{X,Y}^2}{S_Y^2}$$

Kontrollimuuttujat (esimerkin jatkoa)

- $X = 100$ ensimmäisen asiakkaan keskim. odotusaika
- $Y = 99$ ensimmäisen asiakkaan keskim. palveluaika

$$\nu = E[Y] = 0.9$$

i	X_i	Y_i
1	3.84	0.92
2	3.18	0.95
3	2.26	0.88
4	2.76	0.89
5	4.33	0.93
6	1.35	0.81
7	1.82	0.84
8	3.01	0.92
9	1.68	0.85
10	3.60	0.88

- Keskimääräinen saapumisten väliaika 1 (kuorma 0.9)
- Kymmenen toistoa: $\bar{X} = 3.78$, $\bar{Y} = 0.89$
- Näistä lasketut otosvarianssit ja kovarianssit:

$$S_X^2 = 13.33$$

$$S_Y^2 = 0.002$$

$$S_{X,Y}^2 = 0.07$$

$$\Rightarrow \rho_{X,Y} = 0.43$$

$$\Rightarrow a^* = 30$$

$$\Rightarrow \bar{Z} = \bar{X} - a^*(\bar{Y} - \nu) = 4.13$$

- Tämä on täsmälleen oikea arvo (kun taas $\bar{X} = 3.78$)

Kontrollimuuttujat (jatkoa)

- Kontrollimuuttujien käyttö saattaa vaatia enemmän työtä (etenkin parannetun version käyttö) kuin edellä käsitellyt reduktiotekniikat
 - menetelmä voi kuitenkin olla varsin tehokas
- Kontrollimuuttuja voidaan valita myös jostakin rinnakkaisesta systeemistä
- Tehtävänä voi esim. olla tutkia keskimääräistä viipymääikää M/M/1-jonossa jonkin kehittyneen skedulointimenetelmän alaisuudessa
 - rinnakkaiseksi järjestelmäksi voidaan ottaa tavallinen M/M/1-FIFO -jono
 - kontrollimuuttujaksi otetaan viipymäaika tämän rinnakkaisen järjestelmän jonossa
 - sen odotusarvo tunnetaan, $1/(\mu - \lambda)$
 - tutkittavaa järjestelmää ja rinnakkaisjärjestelmää ajetaan samoilla syötteillä (samat saapumisvirrat: saapumisväliajat ja palveluajat)

Ehdollistaminen

- Idea: korvataan satunnaismuuttuja ehdollisella odotusarvollaan
- Tuloksen kerääminen simulaatioajasta merkitsee yleensä tietyn satunnaismuuttujan X keskiarvojen laskemista
 - viipymäaika jonossa; aika, jonka jono on tyhjä; aika, jona kaikki palvelijat ovat käytössä
 - ...
- Joissakin tapauksissa kyseisen satunnaismuuttujan ehdollinen odotusarvo (ehdollistettuna jonkin toisen, systeemistä mitattavissa olevan muuttujan Y vallitsevaan arvoon) tunnetaan eksaktisti
- Tällöin on edullista kerätä statistiikkaa ei muuttujan X arvosta itsestään vaan kyseisestä ehdollisesta odotusarvosta $E[X | Y]$
 - havaittava muuttuja on nyt $Z = E[X | Y]$
 - tämä on satunnaismuuttuja, jonka arvot vaihtelevat, kun Y vaihtelee
 - kiinteällä Y :n arvolla se on tunnettu luku (oletetaan tunnetuksi)

Ehdollistaminen (jatkoa)

- Pätee

$$E[Z] = E[E[X | Y]] = E[X]$$

- Toisaalta tunnetaan varianssin ehdollistamiskaava

$$V[X] = E[V[X | Y]] + V[E[X | Y]]$$

josta

$$V[Z] = V[E[X | Y]] = V[X] - E[V[X | Y]]$$

- Varianssi pienenee
 - ehdollistaminen eliminoi X :n vaihtelun kaikkien niiden tapausten joukon sisällä, joissa ehdollistavalla muuttujalla Y on tietty kiinteä arvo

Ehdollistaminen: esimerkki 1

- Estojärjestelmään saapuu puheluita Poissonisesti intensiteetillä λ
- Halutaan arvioida, kuinka paljon puheluita keskimäärin estyy aikayksikössä
- Suoraviivaisessa simuloinnissa seurataan järjestelmän kehitystä ajanjakson T yli ja rekisteröidään estyneiden puheluiden lukumäärä L
 - estimaatti kysytylle suureelle on L/T
- Koska puheluita estyy vain, kun systeemi on estotilassa, pätee

$$L = \sum_i L_i$$

missä L_i on i :nnessä estojaksossa estyneiden puheluiden lukumäärä

- Olkoon kyseisen estojakson kesto simuloinnissa B_i
- Koska saapumiset tapahtuvat Poissonisesti, tiedetään

$$E[L_i | B_i] = \lambda B_i$$

Ehdollistaminen: esimerkki 1 jatkuu

- Sen sijaan, että kerättäisiin estyneiden puheluiden lukumäärää, kannattakin kerätä estotilan kokonaiskestoa $\sum_i B_i$
- Estyneiden puheluiden lukumäärän ehdollinen odostusarvo on nyt

$$\bar{L} = \lambda \sum_i B_i$$

ja uusi estimaattori kysytylle suureelle on $\bar{L}/T$

- Simuloinnin kulku ei muutu mitenkään
 - nyt vain rekisteröidään L_i :n asemesta suureen $E[L_i | B_i] = \lambda B_i$ arvoja
 - estojakson aikana saapuvien puheluiden virran arvonnasta aiheutuva varianssi eliminoiduu

Ehdollistaminen: esimerkki 2

- Tehtävänä on arvioida keskimääräinen viipymäaika $^*/M/1$ -FIFO -jonossa
- Suoraviivaisessa simuloinnissa seurataan järjestelmän kehitystä, kunnes n asiakasta on palveltu
 - mitataan kunkin asiakkaan viipymäaika T_i , $i = 1, 2, \dots, n$
 - estimaattori on $\frac{1}{n} \sum_i T_i$
- Jos i :nnen asiakkaan saapuessa jonojonossa on edellä m_i asiakasta, niin tähän lukumäärään ehdollistettuna pätee

$$E[T_i | m_i] = (m_i + 1)/\mu$$

missä $1/\mu$ on yhden asiakkaan keskimääräinen palveluaika jonossa (huom! muistittomuus)

Ehdollistaminen: esimerkki 2 jatkuu

- T_i :n asemesta on edullista ottaa havaittavaksi suureeksi $E[T_i | m_i]$ eli olennaisesti m_i

- Estimaattoriksi saadaan

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (m_i + 1) / \mu$$

- Taaskaan simuloinnin kulku ei muutu
 - jonoon saapuva asiakas näkee saman jononpituuden kuin ennenkin
 - nyt vain viipymääjan rekisteröinnistä jää pois se vaihtelu minkä jonossa olevien asiakkaiden palveluaikojen arpominen aiheuttaa
 - kaikki palveluajat on korvattu odotusarvolla $1/\mu$

Ehdollistaminen (jatkuu)

Statistiikan keruussa on aina kun vain mahdollista edullista korvata satunnaismuuttuja (kulloisenkin dynaamiseen tilanteeseen ehdollistetulla) odotusarvolla

- Pieni varaus edelliseen: varianssin reduktio ei ole aina taattu
 - simuloinnin aikana saatavat näytteet satunnaismuuttujasta eivät ole riippumattomia vaan yleensä positiivisesti korreloituneita, mikä kasvattaa keskiarvon varianssia riippumattomien näytteisiin verrattuna
 - ehdollistaminen voi tehdä korrelaatiot vielä voimakkaammaksi
 - periaatteessa on mahdollista, että tämä kumoaa yksittäisen pisteen varianssin reduktion (käytännössä lienee harvinaista)

RESTART (Repetitive Simulation Trials After Reaching Thresholds)

- RESTART on harvinaisten tapausten simulointiin tarkoitettu kiihdytysmenetelmä
- Menetelmä on perusideaaltaan yksinkertainen ja helppo soveltaa mihin tahansa tapaukseen (ei vaadi monimutkaista analyysiä)
- Tässäkin on kysymyksessä eräänlainen ehdollistamismenetelmä
 - mutta nyt ehdollinenkin odotusarvo estimoidaan simuloimalla
- Oletetaan, että ollaan kiinnostuneita harvinaisesta tapahtumasta A
 - esim. A voi tarkoittaa, että muuttuja X_t ylittää jonkin (korkean) tason L

$$A = \{X_t > L\}$$

- Olkoon $C \supset A$ toinen, vähemmän harvinainen tapahtuma, jolle pätee

$$1 \gg P\{C\} \gg P\{A\}$$

- esim. C voi tarkoittaa, että muuttuja X_t ylittää jonkin alemman kynnystason T

$$C = \{X_t > T\}$$

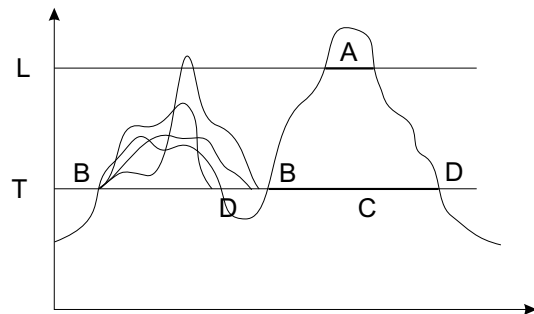
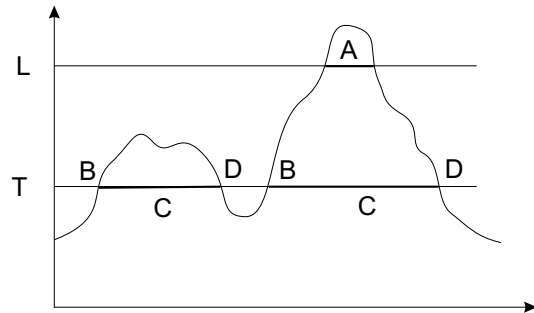
RESTART (jatkuu)

- Ehdollisen todennäköisyyden määritelmän mukaan pätee

$$P\{A\} = P\{C\}P\{A|C\}$$

- Tavallisella simuloinnilla on helppo saada tarkka estimaatti todennäköisyydelle $P\{C\}$
- Sen sijaan ehdollista todennäköisyyttä $P\{A|C\}$ on vaikea estimoida, koska C esiintyy harvoin
- RESTARTissa $P\{A|C\}$:n estimaattia tarkennetaan tekemällä useita toistoja niistä simulointiajon (prosessin X_t) osista, joissa C esiintyy
 - koska C itsessään on oletettu suhteellisen harvinaiseksi C -tapahtuman toistot eivät simulointiajan kannalta ole kovin raskaita

RESTART (jatkuu)



Tavallinen simulointi (ylempi kuva) ja RESTART-menetelmä (alempi kuva)

- tapahtuman B sattuessa systeemin tila talletetaan
- kun on päästy pisteeseen D eli tapahtuma C loppuu, edellisen tapahtuman B tila palautetaan ja jakso B – D simuloidaan uudelleen
- tämä proseduuri toistetaan n kertaa
- n :nnellä kerralla simulointia jatketaan tavalliseen tapaan pisteestä D eteenpäin, kunnes tullaan uuteen pisteeseen B , josta eteenpäin tehdään jälleen n toistoa seuraavaan pisteeseen D asti
- harvinaisen tapahtuman A esiinsaamiseksi ne jaksot, joissa se voi ylipäättään esiintyä (jakso C), toistetaan n kertaa

RESTART (jatkuu)

- RESTART-menetelmällä voidaan saavuttaa varsin dramaattisia säästöjä simulointiajassa
- Jos järjestelmä on mutkikas, niin merkittävä kustannus laskennassa muodostuu tilan B talletamisesta ja palauttamisesta
 - järjestelmän koko tila (kaikkien muuttujien arvot) on talletettava
- Menetelmän tehostamiseksi siitä on kehitetty variantteja, joissa käytetään useampia kynnyksitasoja ja/tai hystereesiä