

Teoria

- Johdanto simulointiin
- Simuloinnin kulku -- prosessin realisaatioiden tuottaminen
- Satunnaismuuttujan arvonta annetusta jakaumasta
- Tulosten keruu ja analyysi
- Varianssinreduktioteknikoista

04/10/2004

1

Tilastotietojen keruu

- Johdannossa otettiin lähtökohdaksi, että simuloinnin tavoitteena on tarkasteltavan järjestelmän suorituskyvyn arviointi. Simuloimalla siis pyritään arvioimaan jonkin suorituskykyyn liittyvän parametrin arvo α
- Tämä parametri voi liittyä joko järjestelmän **transienttiin** käyttäytymiseen
 - esim. 25 ensimmäisen asiakkaan kokema keskimääräinen odotusaika M/M/1-jonossa tietyllä kuormalla, kun oletetaan, että systeemi on alussa tyhjätai sitten ns. **tasapainotilaan** (steady-state)
 - esim. asiakkaan keskimääräinen odotusaika M/M/1-jonossa tietyllä kuormalla
- Ko. suorituskykyparametri voi toisaalta kuvata tilannetta järjestelmän asiakkaiden kannalta (diskreetisti)
 - esim. Saapuvan asiakkaan keskimääräinen näkemä jononpituus M/M/1-jonossa tietyllä kuormallatai sitten systeemin kannalta (jatkuvasti)
 - esim. keskimääräinen jononpituus M/M/1-jonossa tietyllä kuormalla
- Joka tapauksessa yksittäinen simulointiajo tuottaa yhden havainnon, joka jollakin lailla kuvaa arvioitavaa parametria
- Tilastollisten päätelmien tekemiseksi tarvitsemme useita havaintoja (mielellään riippumattomia ja samoin jakautuneita)

04/10/2004

2

Transienttien piirteiden simulointi (1)

- Jos kyseessä on asiakkaiden kokemaan palvelun laatuun liittyvä parametri yksittäinen simulointi päättyy, kun on saatu tietty määrä asiakkaita käsiteltyä
 - esim. oltaessa kiinnostuneita k:n ensimmäisen asiakkaan odotusajasta M/M/1-jonossa, simulointia jatketaan, kunnes viimeinenkin näistä k asiakasta on saapunut ja päässyt palveluun
- Yksittäisestä simuloinnista saatava havainto X on tässä tapauksessa näiden k:n asiakkaan odotusaikojen W_i keskiarvo ko. simuloinnissa:

$$X = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k W_i$$

- keskeisen raja-arvolauseen perusteella ko. keskiarvoa voidaan pitää ainakin likimain normaalijakaumaa noudattavana (sitä paremmin, mitä enemmän havaintoja)
- Tilastollisten päätelmien tekemiseksi tarvitsemme riippumattomia ja samoin jakautuneita havaintoja. Näitä saadaan tekemällä useita samanlaisia mutta toisistaan riippumattomia simulointiajoja (toisistaan riippumattomilla satunnaisluvuilla)

Transienttien piirteiden simulointi (2)

- Jos taas kyseessä on systeemin suorituskykyyn liittyvä suure, jota seurataan jatkuvasti, yksittäinen simulointi päättyy ennalta määrätyllä ajanhetkellä T
 - esim. oltaessa kiinnostuneita keskimääräisestä jononpituudesta aikavälillä $[0, T]$, (tapahtumapohjaista) simulointia jatketaan ensimmäiseen hetken T jälkeen tapahtuvaan tapahtumaan asti
- Yksittäisestä simuloinnista saatava havainto X on tässä tapauksessa jononpituuden $L(t)$ aikakeskiarvo yli välin $[0, T]$

$$X = \frac{1}{T} \int_0^T L(t) dt$$

- koska jononpituus ei muutu tapahtumien välillä, ko. integraali on helposti laskettavissa nelikulmioiden summana (huomaa viimeisen tapahtumavälin erityiskäsittely)
- Tilastollisten päätelmien tekemiseksi tarvitsemme riippumattomia ja samoin jakautuneita havaintoja. Näitä saadaan tekemällä useita samanlaisia mutta toisistaan riippumattomia simulointiajoja (toisistaan riippumattomilla satunnaisluvuilla)

Tasapainotilaan liittyvien piirteiden simulointi (1)

- Tilastotietojen keruu yksittäisestä simuloinnista tapahtuu periaatteessa samalla tavalla kuin transientteja piirteitä simuloitaessa.
- Simuloinnin alussa on kuitenkin ns. lämmittelyvaihe (ennen kuin systeemi on likimain tasapainossa), joka on jätettävä pois kerättävästä datasta.
- Simulointitoistojen tuottamiseksi on tässä tapauksessa ainakin kolme eri tapaa:
 - riippumattomat toistot
 - ns. batch means -menetelmä
 - regeneratiivinen menetelmä

Tasapainotilaan liittyvien piirteiden simulointi (2)

- Riippumattomien toistojen menetelmässä tilastotietojen keruu aloitetaan vasta lämmittelyvaiheen jälkeen.
 - oma ongelmansa on, miten pitkäksi lämmittelyvaihe pitäisi tehdä
- Batch means -menetelmässä tehdään yksi pitkä simulointiajo, joka (keinotekoisesti) jaetaan osiin, joita tietojen keruun kannalta käsitellään omina simulointiajoinaan.
 - tarvitaan vain yksi lämmittelyvaihe, mutta havainnot eivät ole enää täysin riippumattomia
- Regeneratiivisessa menetelmässä vaaditaan, että simuloitava prosessi on regeneroituva. Tällöin kuitenkin saadaan riippumattomia ja samoin jakautuneita havaintoja peräkkäisiltä regeneroitumisjaksoilta.
 - ongelmana on, että jaksojen pituudet voivat satunnaisesti kasvaa hyvinkin pitkiksi
 - esim. G/G/1-jono regeneroituu aina uuden asiakkaan saapuessa tyhjään systeemiin
 - kaikki Markov-prosessit ovat regeneroituvia

Transientin poisto

- Yleensä ollaan kiinnostuneita simuloitavan järjestelmän tasapainotilaan liittyvistä suureista
- Tällöin simuloinnin alkuvaihetta, transienttia, ei tulisi sisällyttää tulosten keruuseen
- Tasapaino on saavutettu silloin, kun systeemin alkutila on "unohtunut"
 - sillä, mikä alkutila tarkkaanottaen oli, ei ole enää vaikutusta nykyisen tilan jakaumassa
- Transientin poistoon käytetään seuraavia menetelmiä
 - pitkä ajo
 - sopiva initialisointi
 - alkudatan hylkäys
 - batch means
 - regeneratiivinen simulointi

04/10/2004

7

Transientin poisto (jatkoa)

- Pitkä ajo
 - karkea menetelmä
 - jos ajo on kyllin pitkä, alkutransientin vaikutus "hukkuu" muun datan joukossa
 - vaaditaan hyvin pitkiä ajoja -- hukkaa resursseja
 - vaikea tietää, mikä on riittävän pitkä
- Sopiva initialisointi
 - sen sijaan, että aloitetaan simulointi keinotekoisesta alkutilasta (esim. jonot tyhjiä), käynnistetään systeemi tilasta, joka on lähempänä tasapainoa
 - annetaan eri suureille alkuarvoiksi pitkän aikavälin keskiarvot
 - nämä voidaan likimain tuntea aikaisempien simulointien tai analyttisten tarkastelujen perusteella
 - tämä vähentää alkutransientin vaikutusta, muttei poista sitä
 - jos tilamuuttujien tasapainojakaumat tunnetaan, alkutransientti voidaan kokonaan poistaa arpomalla muuttujien arvot kyseisistä jakaumista
 - erillinen arvonta jokaisessa toistossa
 - useimmiten jakautumia ei kuitenkaan tunneta

04/10/2004

8

Transientin poisto (jatkoa)

- Alkudatan hylkäys
 - suoraviivainen menetelmä
 - suoritetaan "alkulämmittely" ja kerätään varsinainen data vasta tämän jälkeen
 - ongelma: kuinka pitkä transientti on?
 - a) joissakin tapauksissa se tiedetään
 - esimerkiksi tavallisessa häviöjärjestelmässä relaksaatioaika on sama kuin yhteyden (puhelun) keskimääräinen pitoaika
 - karsittava osuus on tällöin $n \cdot \text{pitoaika}$, missä n on luokkaa 3...10
 - alkuarvojen vaikutus on tällöin vähentynyt tekijällä $e^{-10} \approx 10^{-1.3 \dots -4.3}$
 - b) yleensä relaksaatioaikaa ei tunneta
 - tällöin voidaan nojautua kokeiluun
 - toistetuissa simuloinneissa kaikista ajoista karsitaan pois samanpituinen osuus
 - annetaan tämän pituuden kasvaa 0:sta ylöspäin ja piirretään mitatun suureen (keski)arvo muulta jaksolta karsitun jakson pituuden funktiona
 - kun keskiarvo ei enää muutu karsitun jakson pituutta kasvatettaessa, on transientti karsittu pois

04/10/2004

9

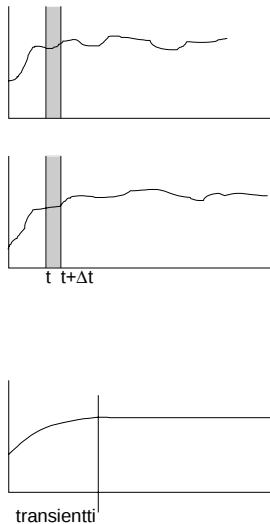
Transientin poisto (jatkoa)

- c) Keskiarvo liukuvassa ikkunassa
 - tämä on toinen kokeellinen menetelmä transientin keston määrittämiseksi
 - toistetussa simuloinnissa kustakin ajosta tulokseen kerätään vain tiettyyn (suhteellisen lyhyeen) ikkunaan osuva pätkä realisaatiosta
 - lasketaan halutun suureen arvo ikkunan sijainnin funktiona
 - keskiarvoistetaan toistojen yli vaihteluiden vähentämiseksi (lyhyen ikkunan sisältä статистиikkaa kertyy vähän ja vaihtelut ovat suuria)
 - sijainnin funktiona tarkasteltuna suure yleensä muuttuu alussa ja sitten vakioituu
 - kun vakiovaiheeseen on päästy, transientti on ohitettu
 - usein transientti on melko lyhyt ja on helppo toimia varman päälle: poistettava jakso voidaan valita vaikkapa kaksinkertaiseksi kokeellisesti määrättyyn transientin keston nähden

04/10/2004

10

Transientin keston arviointi liukuvan ikkunan menetelmällä



- Pyritään saamaan käsitys havaittavan suureen "hetkellisen arvon" odotusarvon käyttäytymisestä ajan funktiona
- Odotusarvo määrätään toistokokeiden keskiarvona
- Vaihteluiden vähentämiseksi korvataan hetkellinen arvo kussakin ajossa liukuvan ikkunan sisällä lasketulla keskiarvolla
- Liukuvan ikkunan sijainnin funktiona piirretystä käyrästä voidaan arvioida, milloin transientti loppuu

04/10/2004

11

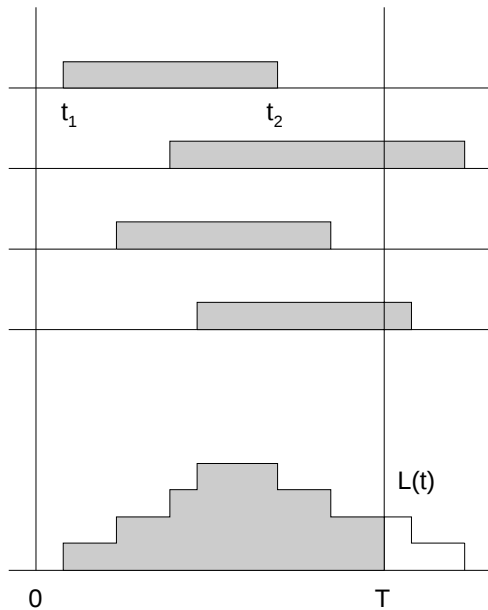
Simuloinnin päättäminen

- Simuloinnin lopetusehdon täytyessä suoritetaan simuloinnin päättäminen
- Keskeneräisten asioiden käsittelyssä on oltava huolellinen
- Tarkasteltaessa asiakkaan näkökulmaan liittyvää ns. tapahtumapohjaista suuretta
 - tarjottujen kutsujen kokema esto, ylivuotavien pakettien osuus jne
 on otettava huomioon vain ne tapahtumat, jotka on käsitelty loppuun
 - esim. keskimääräinen odotusaika = (niiden asiakkaiden odotusaikojen summa, joiden odotus on loppunut, ts. jotka ovat päässeet palveluun) / (niiden asiakkaiden lukumäärä, joiden odotus on loppunut)
- Tarkasteltaessa systeemin näkökulmaan liittyvää (aikapohjaista) suuretta
 - jononpituus L, aikaosuus jonka systeemi on estotilassa jne
 on keskiarvon laskenta ulotettava simulointijakson T loppuun asti
 - esim. keskimääräinen jononpituus = $\frac{1}{T} \int_0^T L(t) dt$
 - tavallisesti integraalia kerätään vähentämällä saapumishetkellä saapumisaika ja lisäämällä poistumishetkellä poistumisaika
 - erikseen on huomioitava myös ne asiakkaat, jotka ovat sisällä simuloinnin loppuessa; käsitellään ne ikään kuin hetkellä T poistuvina asiakkaina

04/10/2004

12

Jononpituuden aikaintegraalin laskeminen



- Jononpituuden $L(t)$ aikaintegraali muodostuu yksittäisten asiakkaiden jonossa viettämistä ajoista
- Yhden asiakkaan jonossa viettämä aika on lähtöajan t_2 ja tuloajan t_1 erotus $t_2 - t_1$
- $L(t)$:n integraalia voidaan kerätä
 - vähentämällä integraalin arvosta t_1 asiakkaan tullessa jonoon
 - lisäämällä siihen arvo t_2 asiakkaan poistuessa jonosta
- Simuloinnin päättyessä hetkellä T , integraali tulee kerätyksi oikealta ajalta, jos loppuhetkellä sisällä olevien asiakkaiden katsotaan poistuvan järjestelmästä hetkellä T

04/10/2004

13

Parametrien estimointi

- Kuten edellisessä kohdassa todettiin, simuloinnilla pyritään arvioimaan jonkin suorituskäytön liittyvän parametrin arvo α (esim. asiakkaiden keskimääräinen systeemisäoloaika tai keskimääräinen jononpituus M/M/1-jonossa)
- Yksittäinen simulointi tuottaa kyseisestä parametrin havainnon X_i , joka siis on satunnaismuuttuja. Havaintoa X_i sanotaan **harhattomaksi**, jos $E[X_i] = \alpha$.
- Oletetaan, että olemme saaneet simuloimalla n kpl **riippumattomia** ja **samoin jakautuneita** (i.i.d.) havaintoja. Tällöin niiden **keskiarvo**

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

on parametrin α **harhaton** ja **tarkentuva** estimaattori, sillä

$$E[\bar{X}_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i] = \alpha$$

$$D^2[\bar{X}_n] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D^2[X_i] = \frac{1}{n} D^2[X] = \frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

04/10/2004

14

Esimerkki

- Pyrimme arvioimaan simuloimalla 25:n ensimmäisen asiakkaan keskimääräistä odotusaikaa M/M/1-jonossa kuormalla $\rho = 0.9$, kun systeemi hetkellä 0 on tyhjä.
- Teoreettinen arvo: $\alpha = 2.124$
- Kymmenen simulointiajoa ovat tuottaneet seuraavat havainnot X_i (so. keskimääräiset odotusajat kyseisissä simuloinneissa):
 - 1.051, 6.438, 2.646, 0.805, 1.505, 0.546, 2.281, 2.822, 0.414 ja 1.307
- Näiden keskiarvo

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{10} (1.051 + 6.438 + \dots + 1.307) = 1.982$$

on simulointikokeen antama (25:n ensimmäisen asiakkaan) keskimääräisen odotusajan estimaatti.

Estimaattorin luottamusväli (1)

- Edellä on todettu, että simulointikokeissa saadut havainnot X_i ovat ainakin likimain normaalijakautuneita
- Jos simulointikokeen antamat havainnot X_i noudattaisivat tarkasti normaalijakaumaa $N(\alpha, \sigma^2)$ ja yksittäisen havainnon varianssi $\sigma^2 = D^2[X]$ tunnettaisiin, noudattaisi n :n toiston keskiarvo normaalijakaumaa $N(\alpha, \sigma^2/n)$.
- Tästä saadaan piste-estimaattorina käytetyn havaintojen keskiarvon luottamusväliksi (luottamustasolla $1 - \beta$):

$$\bar{X}_n \pm z_{1-\beta/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

missä kerroin z_p tarkoittaa standardin normaalijakauman $N(0,1)$ p -fraktiilia, ts. $P\{Z \leq z_p\} = p$, missä $Z \sim N(0,1)$

- Tulkinta: estimoitava parametri α on tn:llä $1 - \beta$ kyseisellä välillä.
- Esimerkiksi 95%:n luottamustasoa vastaa kerroin $z_{0.975} \approx 1.960$

Estimaattorin luottamusväli (2)

- Yleensä emme kuitenkaan tunne yksittäisen havainnon varianssia $\sigma^2 = D^2[X]$.
- Sitä voidaan kuitenkin puolestaan estimoida ns. otosvarianssilla

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

joka on (riippumattomien ja samoin jakautuneiden havaintojen tapauksessa) varianssin harhaton estimaattori.

- Otoshajonta on otosvarianssin neliöjuuri:

$$S_n = \sqrt{S_n^2}$$

Estimaattorin luottamusväli (3)

- Jos simulointikokeen antamat havainnot X_i noudattaisivat tarkasti normaalijakaumaa $N(\alpha, \sigma^2)$, noudattaisi otoshajonnalla sopivasti normeerattu otoskeskiarvo ns. Studentin t-jakaumaa vapausastein $n-1$.
- Tästä saadaan piste-estimaattorina käytetyn havaintojen keskiarvon luottamusväliksi (luottamustasolla $1 - \beta$):

$$\bar{X}_n \pm t_{n-1, 1-\beta/2} \cdot \frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

missä kerroin $t_{n-1,p}$ tarkoittaa t-jakauman (vapausastein $n-1$) p -fraktiilia, ts. $P\{T \leq t_{n-1,p}\} = p$, missä T noudattaa ko. t-jakaumaa

- Tulkinta: estimoitava parametri α on t_{n-1} :llä $1 - \beta$ kyseisellä välillä.
- Esimerkiksi 95%:n luottamustasoa vastaa
 - 10 havainnon tapauksessa kerroin $t_{9,0.975} \approx 2.262$ ja
 - 101 havainnon tapauksessa kerroin $t_{100,0.975} \approx 1.984$

Esimerkki (jatkoa)

- Pyrimme arvioimaan simuloimalla 25:n ensimmäisen asiakkaan keskimääräistä odotusaikaa M/M/1-jonossa kuormalla $\rho = 0.9$, kun systeemi hetkellä 0 on tyhjä.
- Teoreettinen arvo: $\alpha = 2.124$
- Kymmenen simulointiajoa ovat tuottaneet seuraavat havainnot X_i (so. keskimääräiset systeemissäoloajat kyseisissä simuloinneissa):
 - 1.051, 6.438, 2.646, 0.805, 1.505, 0.546, 2.281, 2.822, 0.414 ja 1.307
- Otoskeskiarvoksi saatiin 1.982 ja otoshajonnaksi tulee

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{9}((1.051 - 1.982)^2 + \dots + (1.307 - 1.982)^2)} = 1.781$$

- Simulointikokeen antama 25:n ensimmäisen asiakkaan keskimääräisen odotusajan piste-estimaatin luottamusväli 95%:n luottamustasolla on siis

$$\bar{X}_n \pm t_{n-1, 1-\beta/2} \cdot \frac{S_n}{\sqrt{n}} = 1.982 \pm 2.262 \cdot \frac{1.781}{\sqrt{10}} = 1.982 \pm 1.274$$

Havaintoja

- Simulointikokeen tulos tarkentuu (so. piste-estimaatin luottamusväli kapenee), kun
 - simulointitoistojen eli riippumattomien havaintojen lukumäärää n kasvatetaan
 - yksittäisen havainnon varianssia pienennetään (esim. ajamalla pitempiä yksittäisiä simulointiajoja tai muilla ns. varianssin reduktiomenetelmillä)
 - Jos on annettu haluttu simulointitulosten suhteellinen tarkkuus (so. luottamusvälin puolikkaan suhde otoskeskiarvoon), voidaan dynaamisesti seurata, kuinka monta riippumatonta simulointitoistoa on tehtävä ko. tavoitteeseen pääsemiseksi