Teoria

- Johdanto simulointiin
- Simuloinnin kulku -- prosessin realisaatioiden tuottaminen
- Satunnaismuuttujan arvonta annetusta jakaumasta
- Tulosten keruu ja analyysi
- Varianssinreduktiotekniikoista

Satunnaismuuttujan arvonta annetusta jakaumasta

Satunnaismuuttujien generointi on liian tärkeä asia jätettäväksi sattuman varaan !

- *Hyvä statistiikka* (noudattaa jakaumaa) ja riippumattomuus
  - sulkee pois “hatusta vetämisen”
- *Toistettava sekvenssi*
  - sulkee pois todellisen arvonnan tai fysikaalisten prosessien (radioaktiivisuus) käytön
- *Pitkä sarja* eri lukuja
  - sulkee pois ennalta tehtyjen taulukoiden käytön
- *Nopea generointi*
  - sulkee pois π:n tai *e*:n tai vastaavan desimaalien käytön

Satunnaismuuttujan arvonta annetusta jakaumasta

- Pohjana ns. **(pseudo)satunnaislukujen generointi**
  - tavoitteena on tuottaa riippumattomia U(0,1)-jakautuneita (tasanjak) satunnaismuuttujia
- Haluttuun jakaumaan päästään U(0,1)-jakaumasta esimerkiksi jollakin seuraavista menetelmistä:
  - **diskretointi** (=> Bernoulli(p), Bin(n,p), Poisson(a), Geom(p))
  - **uudelleen skaalaamalla** (=> U(a,b))
  - **kertymäfunktion käännös** (=> Exp(λ))
  - **muut muunnokset** (=> N(0,1) => N(μ,σ^2))
  - **hylkäysmenetelmällä** (mikä tahansa jakauma)
  - **jakauman karakterisoinnilla** (palautus muihin jakaumiin) (=> Erlang(n,λ), Bin(n,p))
  - **yhdistelmämenetelmällä**
- Simulointia tukevista kielistä, kirjastoista ja työkaluista löytyy yleensä valmiit rutiinit kaikkia tavallisimpia jakaumia noudattavien satunnaislukujen generointiin

Satunnaislukujen generointi

- Satunnaislukugeneraattorilla tarkoitetaan algoritmia, joka tuottaa sarjan (näennäisesti) satunnaisia kokonaislukuja Z_i jollakin välillä 0,1,…,m-1
  - tuotettu sarja on aina jaksollinen (tavoitteena mahdollisimman pitkä jakso)
  - generoidut luvut eivät “tiukasti ottaen” ole ollenkaan satunnaisia vaan deterministisiä (siis pseudosatunnaisia)
  - käytännössä homma kuitenkin toimii, kunhan luvut generoidaan “huolella”
- Satunnaislukugeneraattorin generoimien satunnaislukujen “satunnaisuus“ on testattava tilastollisin testein
  - saadun empiirisen jakauman tasaisuus joukossa {0,1,…,m-1}
  - generoitujen satunnaislukujen välinen riippumattomuus (käytännössä korreloimattomuus)
- Yksinkertaisimpia ovat ns. *lineaariset kongruentiaaliset generaattorit* (linear congruential generator). Näistä erikoistapauksena saadaan ns. *multiplikatiiviset kongruentiaaliset generaattorit* (multiplicative congruential generator).
- Kummassakin tapauksessa uusi satunnaisluku määräytyy algoritmisesti välittömästi edellisestä, ts. $Z_{i+1} = f(Z_i)$.
- Muita menetelmiä: additive congruential generators, shuffling

Linear congruential generator (LCG)

- Lineaarinen kongruentiaalinen satunnaislukugeneraattori tuottaa satunnaisia kokonaislukuja Z_i joukosta {0,1,…,m-1} seuraavalla kaavalla (jakso korkeintaan m):

$$Z_{i+1} = (aZ_i + c) \bmod m$$

- Tällainen generaattori siis määritellään antamalla parametrit a, c ja m
- Lisäksi tarvitaan ns. siemenluku Z_0
- Parametrit on valittava huolella; muutoin tuloksena kaikkea muuta kuin satunnaisia lukuja
- Tietyin edellytyksin jaksoksi saadaan maksimiarvo m
  - esim. m muotoa 2^b, c pariton, a muotoa 4*k +1

Multiplicative congruential generator (MCG)

- Multiplikatiivinen kongruentiaalinen satunnaislukugeneraattori tuottaa satunnaisia kokonaislukuja Z_i joukosta {0,1,…,m-1} seuraavalla kaavalla:

$$Z_{i+1} = (aZ_i) \bmod m$$

- Kyseessä on siis LCG:n erikoistapaus valinnalla c = 0
- Tällainen generaattori määritellään antamalla parametrit a ja m
- Lisäksi tarvitaan siemenluku Z_0
- Parametrit on tässäkin tapauksessa valittava huolella; muutoin tuloksena kaikkea muuta kuin satunnaisia lukuja
- Valinnalla m = 2^b (millä tahansa b) jaksoksi saadaan korkeintaan 2^(b-2)
- Parhaimmillaan jaksoksi saadaan kuitenkin m - 1
  - esim. m alkuluku (prime) ja a valitaan sopivasti

U(0,1)-jakautuneen sm:n generointi (tasainen jakauma välillä (0,1))

- Jos (pseudo)satunnaislukugeneraattori tuottaa (pseudo)satunnaisen kokonaisluvun I joukosta {0,1,…,M-1}, niin normeerattu muuttuja U = I/M noudattaa likimain U(0,1)-jakaumaa (tasainen jakauma välillä (0,1))

Siemenlukujen käyttö

(riippuen rand-algoritmista jotkin ohjeista ovat relevantteja / irrelevantteja)

- Älä käytä arvoa 0
- Vältä parillisia arvoja
- Älä käytä yhtä satunnaislukusekvenssiä useaan tarkoitukseen
  - jos lukuja (u_1, u_2, u_3, …) on käytetty saapumisväliaikojen generointiin, samaa sekvenssiä ei pidä käyttää palveluaikojen generointiin
- Eri sekvenssejä käytettäessä varmistu, että ne eivät ole miltään osin päällekkäisiä
  - jos jonkin sekvenssin siemenluku sisältyy toiseen sekvenssiin, niin siitä eteenpäin sekvenssit ovat identtisiä
  - jos pitää generoida 10000 väliaikaa ja 10000 palveluaikaa, voidaan väliaikojen generointiin käytettävät satunnaisluvut laskea siemenluvusta u_0 alkaen (u_1, u_2,...,u_{10000})
  - palveluaikojen generointiin voidaan käyttää lukuja (u_{10001},…,u_{2000}) eli siemenluku on u_{10000}
  - jos satunnaislukusekvenssejä ei talleteta, vaan lukuja generoidaan tarpeen mukaan, on toisen sekvenssin siemenluku u_{10000} selvitettävä etukäteen laskemalla kaikki luvut (u_1, u_2,...,u_{10000}); nämä lasketaan sitten uudelleen simuloinnin aikana ensimmäistä sekvenssiä tuotettaessa

Diskreetin sm:n generointi

- Olk. U ~ U(0,1)
- Olk. X diskreetti sm arvojoukolla S = {0,1,2,…,n} tai S = {0,1,2,...}
- Merk. F(i) = P{X ≤ i}
- Tällöin sm Y, missä

$$Y = \min\{i \in S | F(i) \geq U\}$$

noudattaa samaa jakaumaa kuin X (Y ~ X).

- Tätä kutsutaan diskretointimenetelmäksi. Itse asiassa kyseessä on diskreetin jakauman kertymäfunktion käännös
- Esim. Bernoulli(p)-jakauma:

$$Y = 1_{\{U>1-p\}} = \begin{cases} 0, & U \leq 1-p \\ 1, & U > 1-p \end{cases}$$

Diskreetin sm:n generointi (jatkoa)

- Edellä kuvattu menetelmä, jossa satunnaisluvun U ~ U(0,1) arvoa verrataan peräkkäin kertymäfunktion arvoihin on täysin yleinen
- Monen vertailun tekeminen on kuitenkin laskennallisesti hidasta (sm:ien generointi on simulaattorin ydinsilmukassa ja pitää tapahtua hyvin nopeasti)
- Joissakin yksinkertaisissa tapauksissa vertailuihin perustuva generointi voidaan korvata menetelmällä, jossa suoraan satunnaisluvusta U lähtien halutun diskreetin sm:n arvo voidaan laskea yksinkertaisella kaavalla
- Eräitä esimerkkejä on seuraavassa taulukossa
- - ks. “Generation of random variables with a given distribution”, part 2, sivu 1

Diskreetin sm:n generointi (jatkoa …)

- Usein tilanne on kuitenkin, että diskreetin sm:n generointi suoraan annetusta muuttujasta U~U(0,1) ei ole mahdollista
- Tällöin X:n diskreetti kertymäfunktio F(x) täytyy laskea ja tallettaa johonkin tietorakenteeseen
- Yksinkertaiset haut:
  - talletetaan F(x):n arvot vektoriin ja haetaan alkaen alusta (lineaarinen haku)
  - parannettu haku: mikä tahansa tehokkaampi haku, esim. binäärihaku
  - parannettu binäärihaku: otetaan talteen se indeksin arvo, jossa F(x) on likipitäen 0.5, jolloin saadaan yhdellä vertailulla selville ”kummalla puolella” haun tulos on, ja käytetään sitten binäärihakua (tai lineaarista hakua)
- Optimaalinen haku (pienin määrä vertailuja):
  - esitetään F(x) Huffmanin puun muodossa

Tasajakautuneen sm:n generointi

- Olk. U ~ U(0,1)
- Tällöin X = a + (b - a)U ~ U(a,b)
- Mielivaltaiseen tasajakaumaan päästään siis skaalauksella

Kertymäfunktion käännös -menetelmä

- Olk. U ~ U(0,1)
- Olk. X jatkuva sm arvojoukolla S = [0,∞)
- Oletetaan, että X:n kf F(x) = P{X ≤ x} on aidosti kasvava, jolloin sillä on käänteisfunktio $F^{-1}(y)$
- Tällöin sm Y, missä

$$Y = F^{-1}(U)$$

noudattaa samaa jakaumaa kuin X (Y ~ X).

- Tätä kutsutaan kertymäfunktion käännös -menetelmäksi (inverse transformation)
- Todistus: Koska P{U ≤ z} = z kaikilla z välillä [0,1], niin pätee

$$P\{Y \le x\} = P\{F^{-1}(U) \le x\} = P\{U \le F(x)\} = F(x)$$

Näin ollen Y ~ X.

Eksponentiaalisen sm:n generointi

- Olkoon U ~ U(0,1)
- Olkoon X ~ Exp(λ)
- X:n kf F(x) = P{X ≤ x} = 1 - exp(-λx) on aidosti kasvava, joten sillä on käänteisfunktio $F^{-1}(y) = -(1/\lambda)\ln(1 - y)$
- Koska U ~ U(0,1), myös 1 - U ~ U(0,1)
- Näin ollen (kertymäfunktion käännös -menetelmän mukaan) saadaan
- Algoritmi

$$X = F^{-1}(1-U) = -(1/\lambda)\log U$$

Weibullin jakaumaa noudattavan sm:n generointi

- Weibullin jakauma $W(\lambda,\beta)$ on yleistys eksponenttijakaumasta
- Sm:n $X \sim W(\lambda,\beta)$ kf on $F(x) = P\{X \leq x\} = 1 - \exp(-(\lambda x)^{\beta})$
- Tämän käänteisfunktio on $F^{-1}(y) = (1/\lambda)[-\ln(1 - y)]^{1/\beta}$
- Algoritmi

$$X = F^{-1}(1-U) = (1/\lambda)(-\log U)^{1/\beta}$$

Poisson-prosessin mukaisten saapumisten generointi

- Tärkein tietoliikennejärjestelmien analyysissä käytetty saapumisprosessin malli on **Poisson-prosessi**
- Poisson-prosessia, jonka saapumisintensiteetti on λ, voidaan tunnetusti karakterisoida prosessina, jossa saapumisväliajat ovat riippumattomia $\text{Exp}(\lambda)$-jakautuneita sm:ia
- Merkitään asiakkaan n saapumishetkeä t_n:llä
- Saapumishetket voidaan peräkkäin generoida kaavalla $t_{n+1} = t_n + X_n$
  missä $X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$

- Toinen tapa generoida Poisson-prosessin realisaatio välille (0,T) on:
  - arvo saapumisten kokonaislukumäärä N Poisson-jakaumasta $N \sim \text{Poisson}(\lambda T)$
  - arvo jokaisen pisteen paikka t_n välillä (0,T) tasaisesta jakaumasta $t_n \sim U(0,T)$
  - pisteet $t_1, t_2, \ldots, t_n$ suuruusjärjestykseen asetettuna muodostavat realisaation Poisson-prosessin saapumishetkille

Epästationäärisen Poisson-prosessin mukaisten saapumisten generointi (1)

- Toisinaan on tilanteita, joissa oletus Poisson saapumisintensiteetin vakioisuudesta ei päde (vrt. aikarajoitetut äänestykset/kilpailut)
  - Poisson-prosessia, jonka saapumisintensiteetti on ajan funtio $\lambda(t)$, kutsutaan epästationääriseksi Poisson prosessiksi
- Kaksi tapaa: ohennusmenetelmä tai käännösmenetelmä
- Ohennusmenetelmä
  - Poisson prosessi intensiteetillä λ, jossa saapuminen hyväksytään todennäköisyydellä p (ei hyväksytä tn:llä 1-p), on edelleen Poisson prosessi, mutta intensiteetillä $p\lambda$
  - Simuloinnissa käytettävä $\lambda(t)$ on tunnettu ja sille voidaan laskea yläraja $\lambda^* \geq \lambda(t)$, $\forall t$
  - Idea: Generoidaan saapumisia intensiteetilla λ^* ja hyväksytään saapuminen hetkellä t' todennäköisyydellä $\lambda(t')/\lambda^*$
- Algoritmi: olkoon asiakkaan n saapumishetki t_n
  1. Aseta $\tau = t_n$
  2. Generoi U_1, $U_2 \sim U(0,1)$
  3. Aseta $\tau = \tau - (1/\lambda^*) \ln U_1$
  4. Jos $U_2 \leq \lambda(\tau)/\lambda^*$ palauta $t_{n+1} = \tau$, muuten palaa kohtaan 2
- Ongelma: "Ylimääräisten" saapumistapahtumien generointi
  - tehoton, jos λ^* on suuri verrattuna $\lambda(t)$:n yleiseen arvoon (esim. piikki tai piikit saapumisintensiteetissä)

Epästationäärisen Poisson-prosessin mukaisten saapumisten generointi (2)

- Kääntämismenetelmä: vastaa kertymäfunktion kääntämistä
- Määritellään funktio $\Lambda(t)$

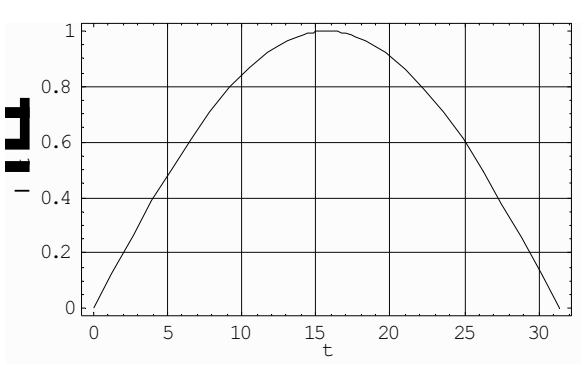
$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(y)\, dy$$

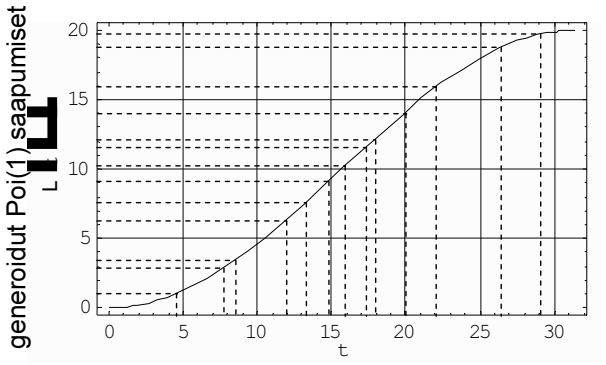
  - $\Lambda(t)$ on välillä [0, t] saapuneiden asiakkaiden keskimääräinen lukumäärä
- Idea: Generoidaan ensin saapumishetkiä τ_n Poisson intensiteetillä 1 ja suoritetaan muunnos $t_n = \Lambda^{-1}(\tau_n)$, missä $\Lambda^{-1}(y)$ on $\Lambda(y)$:n käänteisfunktio. Tällöin saapumishetket t_n noudattavat Poisson prosessia intensiteetillä $\lambda(t)$
- Algoritmi: olkoon τ_n n:nen asiakkaan saapumishetki Poisson intensiteetillä 1, olkoon t_n todellinen saapumisaika intensiteetillä $\lambda(t)$
  1. Generoi $U_1 \sim U(0,1)$
  2. Aseta $\tau_{n+1} = \tau_n - \ln U_1$
  3. Palauta $t_{n+1} = \Lambda^{-1}(\tau_{n+1})$
- Etu: kaikki saapumistapahtumat saadaan käytettyä
  - Ongelmana, että käänteisfunktion ratkaiseminen voi olla vaikeaa/mahdotonta

Epästationäärisen Poisson-prosessin mukaisten saapumisten generointi (3)

- Esimerkki kääntämismenetelmästä:

$$\lambda(t) = \sin(t/10) \quad , \quad t \in [0, 10\pi] \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda(t) = 10(1 - \cos(t/10))$$





toteutuneet Poi(λ(t)) saapumiset

Normaalijakautuneen sm:n generointi

- Olk. U ja V riippumattomia U(0,1)-jakautuneita sm:ia
- Ns. Box-Müller -menetelmän mukaan sm:t X ja Y, missä

$$X = \sqrt{-2\ln U}\cos(2\pi V)$$
$$Y = \sqrt{-2\ln U}\sin(2\pi V)$$

ovat riippumattomia N(0,1)-jakautuneita sm:ia

- Mielivaltaiseen normaalijakaumaan päästään skaalaamalla: $\mu + \sigma X \sim N(\mu, \sigma^2)$