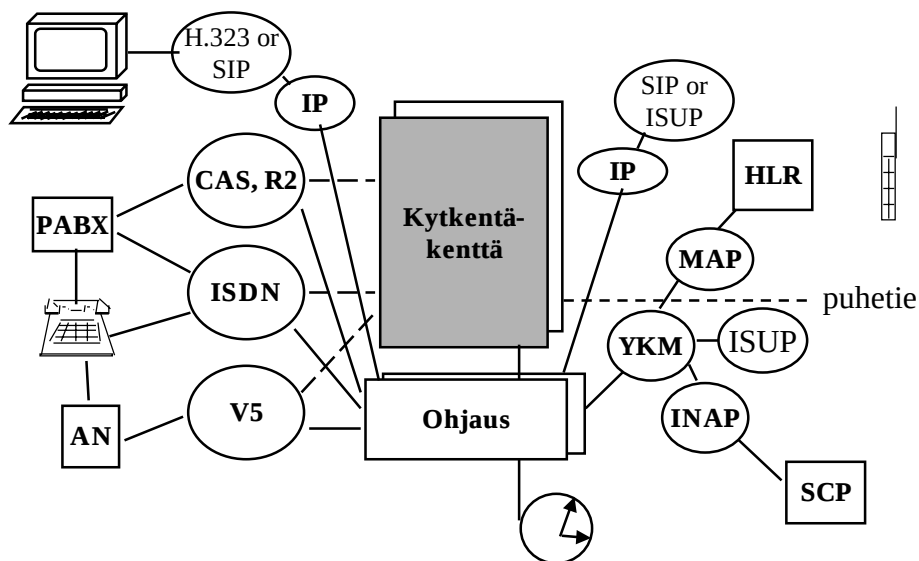


Kyt Kentäkentät - Rekursio, Cantor-verkko

- ✓ Kertaus
- ✓ Estottomuus
 - Uudelleen järjestely
 - Tiukasti estoton
- ✓ Yleinen kolmiportainen verkko
- ✓ Closin -verkko
- ✓ Benes -verkko
- ✓ Cantor -verkko
- ✓ Kyt Kentäpisteet ja kompleksisuus

Kurssin kuva välitysjärjestelmästä



Example

✓ An exchange with

- a subscriber capacity of N (each subscriber directly connected to fabric),
- 5:1 concentration ratio from subscribers to junction lines and
- 10% requirement for internal use

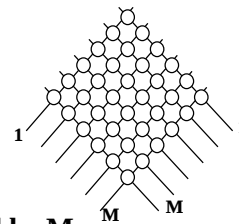
requires a switching fabric with $M = (N + 0.2N) \times 1.1$ inputs and the same nrof of outputs.

✓ A one stage non-blocking switch matrix would contain:

M^2 -cross-points and the logical depth would be 1.

- ### ✓ The length of each input and output bus would be M
- this directly limits the feasible size of the matrix.

- ### ✓ NB: In practice, it is desirable that M = highly divisible by 2



Example 2

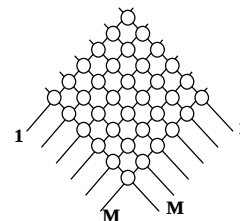
✓ An exchange with

- a capacity of N simultaneous calls,
- 0.72 Erlang average occupancy on lines during busy hour and
- 10% requirement for internal use

requires a switching fabric with $M = 2 \times (1.1 \times N/0.72)$ inputs and the same nrof of outputs.

- ### ✓ Let's take N = 20 000

- ### ✓ $M = 2 \times 1.1 \times 20\,000/0.72 =$
- $= 61\,112 \leq 2048\text{ PCM}$

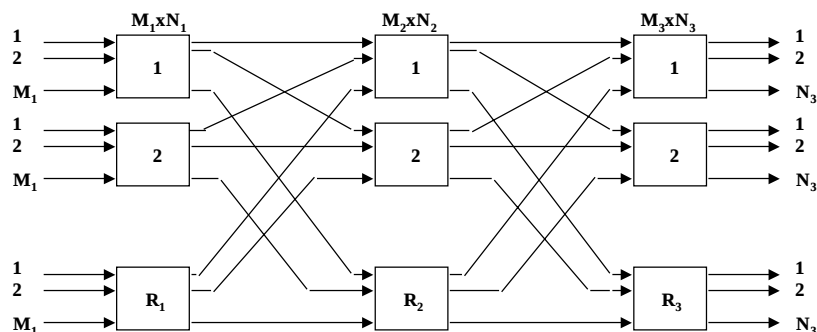


Kytkentäkentän ominaisarvoja

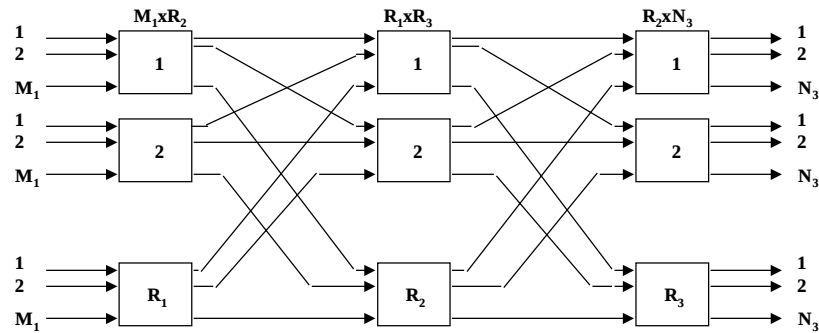
- ✓ Kytkentäpisteiden lukumäärä on ristikytkentäpisteiden lukumäärä kentässä.
- ✓ Looginen syvyys on signaalin kulkutiellä käytettyjen kytkinten lukumäärä.
- ✓ Esto määräytyy kentän rakenteesta.
- ✓ Kytkentäpisteen ajokyky määritellään ajettavien kytkentäpisteiden lukumäärällä.

Kolmiportaisen kytkentäkentän yleinen esitystapa

- ✓ Kolmiportainen kytkentäkenttä, palautettuna puhtaaseen tilakytkentään, voidaan esittää tilakytkiminä, joista jokainen on kytketty seuraavan portaan jokaiseen kytkimeen.



Closin -verkko



- porras 1: $N_1 = R_2$
- porras 2: $M_2 = R_1$ ja $N_2 = R_3$
- porras 3: $M_3 = R_2$

Esim. 8192 PCM, $16M = 8 \times 2M$ perusnopeus:
 $M_1 = N_3 = 1024$,
 $R_1 = R_3 = 8 \times 32 = 256$,
 $R_2 = 2048 \rightarrow$ tiukasti estoton

Tiukasti estoton Closin -verkko

- ✓ Closin -verkko on tiukasti estoton, kun toisen portaatan kytkinten lukumäärä on

$$R_2 \Rightarrow M_1 + N_3 - 1$$

- ✓ Erikoistapauksena symmetrinen kytkinkenttä, jossa $M_1 = N_3 = N$

$$R_2 \Rightarrow 2N - 1$$

Uudelleen järjesteltävä Clos -verkko

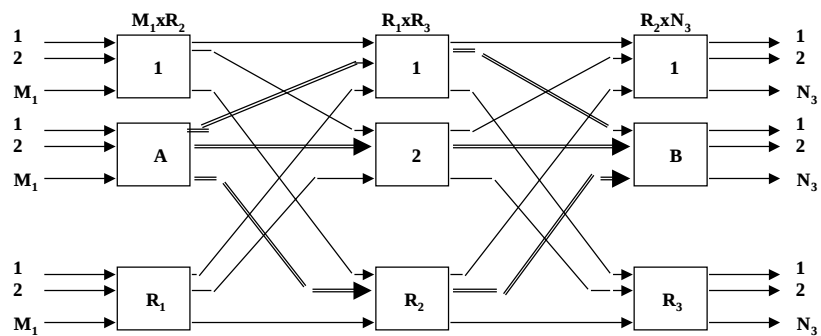
- ✓ Kolmiportainen Closin -verkko on uudelleen järjesteltävän estoton, kun

$$R_2 \Rightarrow \max(M_1, N_3)$$

- ✓ Erikoistapauksena symmetrinen kytkinkenttä, jossa $M_1 = N_3 = N$

$$R_2 \Rightarrow N$$

KytKentä kytkimestä A kytkimeen B



Yhdelle kytkennälle on R_2 vaihtoehtoista tietä tyhjässä kentässä.

Closin teoreema

Closin verkko on tiukasti estoton, jos ja vain jos toisen portaan solmujen (kytkinten) lukumäärä on $r_2 \geq m_1 + n_3 - 1$

Erityisesti symmetrinen verkko, jolle pätee $m_1 = n_3 = n$, on tiukasti estoton jos ja vain jos $r_2 \geq 2n - 1$.

Todistus: Käytetään Paullin matriisia.

- Rivi a , jossa vapaa tulo ja sarake b , jossa vapaa lähtö
- vapaan tulon kytkentä vapaalle lähdölle merkataan uudelle symbolilla ruutuun (a, b)
- rivillä a on korkeintaan $m_1 - 1$ erilaista symbolia, koska kytkimessä a on m_1 tuloa
- sarakkeessa b on korkeintaan $n_3 - 1$ erilaista symbolia
- pahimmillaan yhteensä $m_1 - 1 + n_3 - 1$ erilaista symbolia
- jos meillä on yksi kytkin lisää, eli yhteensä $m_1 + n_3 - 1$, kytkentä onnistuu.

Välttämättömyys: Täytyy olla mahdollista tehdä seuraavat kytkennät:

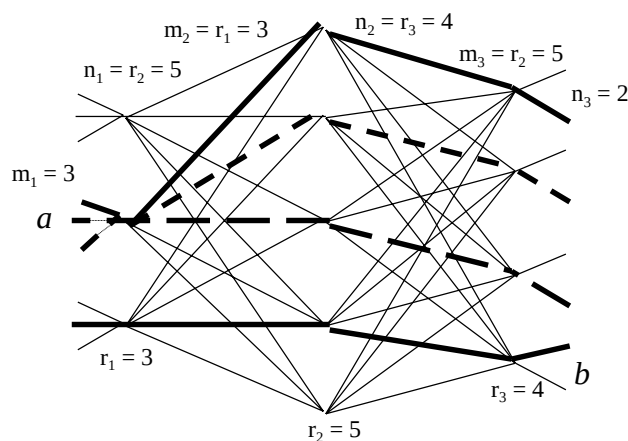
- yhteensä m_1 kytkentää tulokytkimeltä a jaettuna kaikille lähtökytkimille (joka kerta erilainen symboli)
- lähtökytkimeltä b kaikille tulokytkimille, paitsi a : yhteensä $n_3 - 1$ (joka kerta eri symboli), eli
- riville a ja sarakkeeseen b tarvitaan yhteensä $m_1 + n_3 - 1$ erilaista symbolia

© Rka/ML -k2002

Tiedonvälitystekniikka

7 - 11

Closin teoreeman välttämättömyyden visualisointi



Eli $r_2 = 4 = (m_1 + n_3 - 1)$ riittää!

© Rka/ML -k2002

Tiedonvälitystekniikka

7 - 12

Kyt Kentä kenttien vaihtoehtoinen esitystapa

- ✓ Kyt Kentä kenttä voidaan esittää käsittelyn helpottamiseksi joko verkkona tai tasokuviona.
- ✓ Tasokuviossa säästytään yksittäisten yhteyksien piirtämiseltä.
- ✓ Verkkokuva on ymmärtämisen kannalta helpompi.

Kentän rekursiivinen rakentaminen

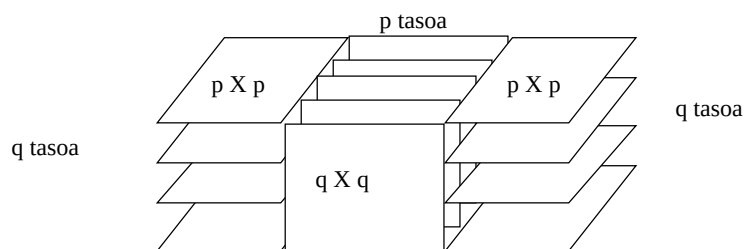
tulot

$$N = p \times q$$

Uudelleen järjestettävästi estoton

lähdöt

$$N = p \times q$$



$$\text{Kyt Kentä pisteit: } p^2q + q^2p + p^2q = 2qp^2 + q^2p$$

Kentän rekursiivinen rakentaminen -2

tulot

$$N = p \times q$$

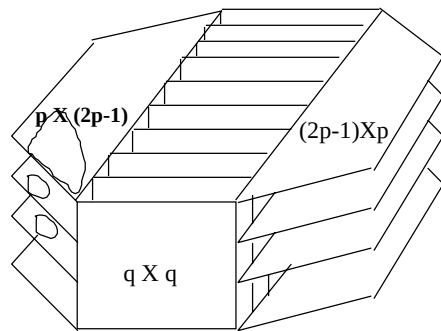
Tiukasti estoton

(2p - 1) tasoa

lähdöt

$$N = p \times q$$

q tasoa



q tasoa

$$\text{Kytkeäpisteitä: } p(2p-1)q + q^2(2p-1) + (2p-1)pq = 2p(2p-1)q + q^2(2p-1)$$

Kytkeäkentän rekursiivinen muodostaminen

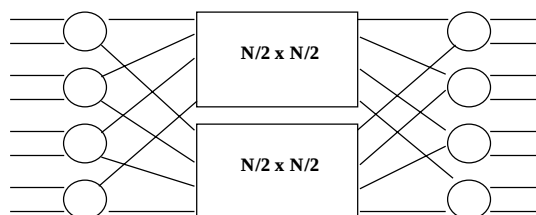
- ✓ Rekursiivisessa muodostamisessa kytkeäkentän rakenne välittyy eri tasoille identtisenä.
- ✓ Tiukasti estottoman Closin-verkon yksittäiset kytkimet muodostetaan tiukasti estottomista Closin-verkoista, jne.
- ✓ Tiukasti estottomista kytkimistä voidaan saada aikaa uudelleen järjestettävästi estoton kenttä (CLOSin teoreema).
- ✓ (Näytämme jatkossa että) Uudelleen järjestettävästi estottomista moduuleista voidaan rakentaa tiukasti estoton kenttä!

Kyt Kentä Kentän muodostamisen problematiikkaa

- ✓ Ihanteellinen ratkaisu:
 - Vähän kytkentäpisteitä
 - Pieni kompleksisuus
 - Yksinkertainen muodostaa
- ✓ $N \times N$ -kytkentäkenttä, miten valita P ja Q ???
- ✓ Kytkentäkentän on laidoiltaan symmetrinen, joten oletuksena valitaan P mahdollisimman pieneksi (esim 2) $\rightarrow Q = N/P$.
- ✓ Toisaalta tiukasti estottoman kytkentäkentän ongelma on kentän keskiportaan koon nopea kasvaminen pienillä P :n arvoilla.
- ✓ Tekijä q viittaa multipleksointikertoimeen $\rightarrow$ täytyy jatkaa rekursiota niin kauan, että käytössä olevat komponentit pystyvät vastaavaan nopeuteen!

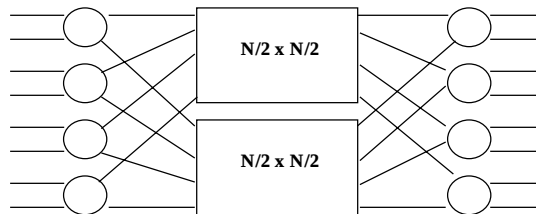
2x2-kytkinten tapaus

- ✓ Mikäli kentän koko on kahden potenssi ($N = 2^n$), voidaan kenttä muodostaa valitsemalla $P=2$ ja $Q=N/2$

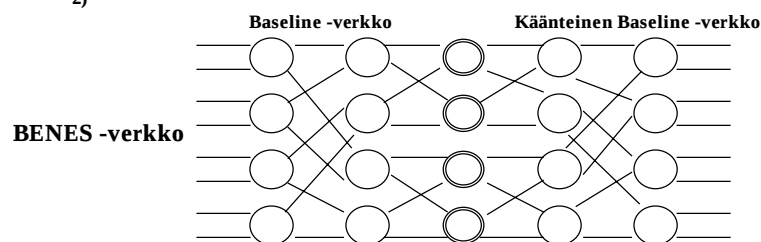


Esim N=8

1)



2)



Benes -verkko

- ✓ Benes -verkko on rekursiivisesti 2×2 -kytkimistä muodostettu uudelleen järjesteltävä verkko.
- ✓ 1-puoliverkko tunnetaan nimellä baseline -verkko
- ✓ 2-puoliverkko tunnetaan nimellä käänteinen baseline -verkko
- ✓ Benes -verkossa on $(2\log_2 N - 1)$ porrasta.
- ✓ KytKentäpisteiden lukumäärä on

$$4(N/2)(2\log_2 N - 1) = 4N\log_2 N - 2N \sim 4N\log_2 N$$

Tiukasti estottoman kytkentäkentän muodostaminen rekursiolla

- ✓ Tiukasti estoton kytkentäkenttä voidaan muodostaa aivan vastaavasti mutta kentän koko kasvaa hyvin nopeasti.
- ✓ Esim. $N \times N$ -kenttä muodostettuna $\sqrt{N} \times \sqrt{N}$ -kytkimistä
- ✓ Valitaan $N = 2^n$ ja $n = 2^l$, jolloin kenttä rakentuu
 - 1 portaassa $2^{n/2}$ kappaleesta ($2^{n/2} \times 2^{n/2}$)-kytkimiä
 - 2 portaassa ($2 \times 2^{n/2} - 1$) kappaleesta ($2^{n/2} \times 2^{n/2}$)-kytkimiä
 - 3 portaassa $2^{n/2}$ kappaleesta ($2^{n/2} \times 2^{n/2}$)-kytkimiä

Jatkoa edelliseen

- ✓ Matemaattisen tarkastelun helpottamiseksi valitaan kytkinten koot hieman toisin.

- 1 portaassa $2^{n/2}$ kappaleesta ($2^{n/2} \times 2^{n/2+1}$)-kytkimiä
- 2 portaassa ($2 \times 2^{n/2}$) kappaleesta ($2^{n/2} \times 2^{n/2}$)-kytkimiä
- 3 portaassa $2^{n/2}$ kappaleesta ($2^{n/2+1} \times 2^{n/2}$)-kytkimiä
- ($2^{n/2} \times 2^{n/2+1}$) = $2(2^{n/2} \times 2^{n/2})$
- Yhteensä $6(2^{n/2})$ kappaletta ($2^{n/2} \times 2^{n/2}$)-kytkimiä

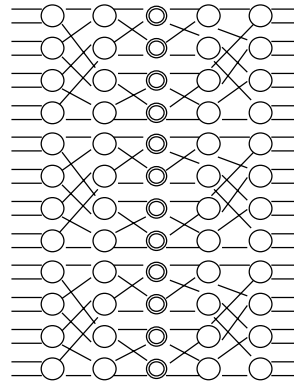
- ✓ Rekursiivinen palautuskaava

$$F(2^n) = 6(2^{n/2})F(2^{n/2}) = 6^l(2^{n/2+n/4+n/8+\dots+1})F(2^1) \\ \sim N(\log_2 N)^{2,58} F(2) = 4N(\log_2 N)^{2,58}$$

- ✓ Tiukasti estoton kenttä sisältää eksponentin verran enemmän kytkimiä kuin uudelleen järjesteltävä kenttä

Cantor -verkko on tapa muodostaa tiukasti estottomia kenttiä pienemmällä kytkentäpiste määrällä

✓ Peruspalikkana on BENES -verkko.



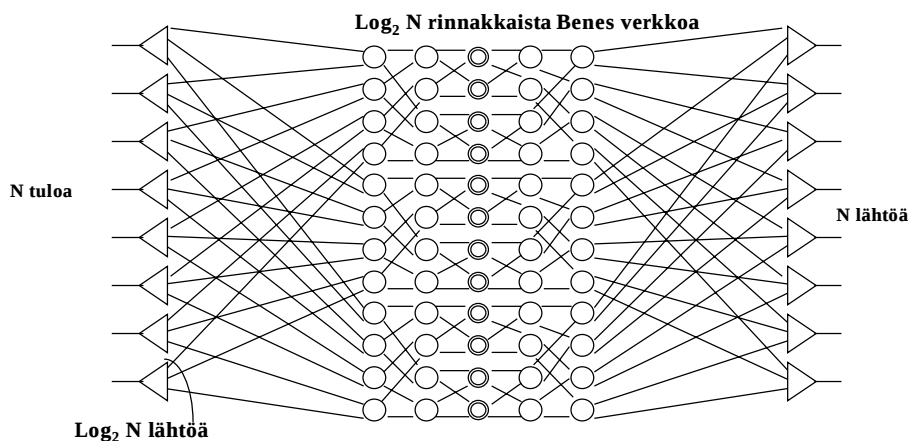
© Rka/ML -k2002

Tiedonvälitystekniikka

7 - 23

Cantor -verkko

✓ Cantor -verkko on tapa muodostaa tiukasti estottomia kenttiä pienemmällä kytkentäpiste määrällä.



© Rka/ML -k2002

Tiedonvälitystekniikka

7 - 24

Cantor verkon ominaisuuksia

• Kytkeänpisteiden lkm = $4 \times N \log_2 N \times \log_2 N = 4N(\log_2 N)^2$
jos kanavointilaitteita ei lasketa.

Cantor verkko on tiukasti estoton!

Todistus:

Merkataan rinnakkaisten Benes verkkojen määrää m ja Benes portaan numeroa k ja

$A(k)$ - portaassa k yhdestä Cantor verkon tulosta ilman uudelleen järjestelyä saavutettavien Benes -kytkinten määrä.

$$A(1) = m.$$

$$A(2) = 2A(1) - 1.$$

$$A(3) = 2A(2) - 2.$$

$$A(k) = 2A(k-1) - 2^{k-2} = 2^2 A(k-2) - 2 \times 2^{k-2} = 2^{k-1} A(1) - (k-1)2^{k-2}$$

$$A(\log N) = 2^{\log N - 1} m - (\log N - 1)2^{\log N - 2}$$

$$= \frac{1}{2} Nm - \frac{1}{4} (\log N - 1)N$$

Cantor todistus jatkuu

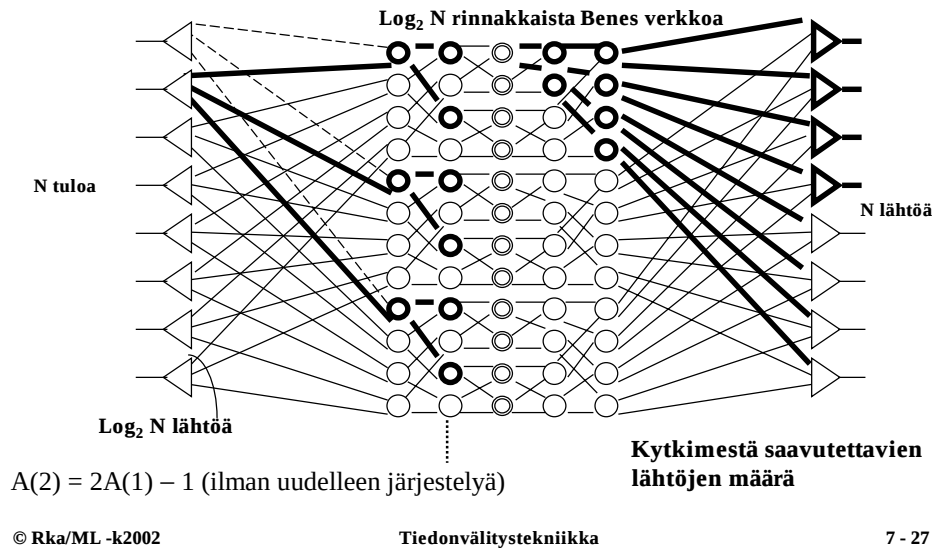
$$2 \times \left\langle \frac{1}{2} Nm - \frac{1}{4} (\log N - 1)N \right\rangle > \frac{Nm}{2}$$

$$\Rightarrow m > \log N - 1.$$

Eli jos rinnakkaisia Benes verkkoja on $\log N$ kappaletta, Cantor verkko on tiukasti estoton. $\square$

Ts. *Tiukasti estoton* Cantor verkko muodostuu laittamalla rinnan $\log N$ kappaletta *uudelleen järjestettävästi estottomia* Benes verkkoja.

Cantor-verkossa saavutettavien kytkinten määrä



Numeerinen esimerkki Cantor verkosta

$$N = 32 \times 2048 = 2^{16} \approx 64\,000$$

$$m = \log N = 16$$

Demultiplekseissa lähtöjä = 16 kappaletta

Multipleksereissa tuloja = 16 kappaletta

Muxeja = 64 000 kappaletta

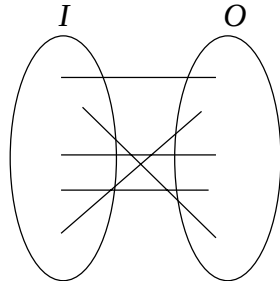
Demuxeja = 64 000 kappaletta

Benes verkkoja = 16 kappaletta

Benes verkoissa portaita = $2\log N - 1 = 2 \times 16 - 1 = 31$ kappaletta

Benes verkoissa kytkimiä = $N \log_2 N = 2^{16} \times 32 \approx 2M$,
kussakin

Kytcentöjen kokonaismäärä kentässä

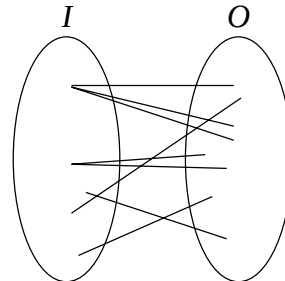


Yksi yhteen

$$C = \{(i,o) \mid i \in I, o \in O\}$$

$$(i,o) \in C \text{ ja } (i,o') \in C \Rightarrow o = o'$$

$$(i,o) \in C \text{ ja } (i',o) \in C \Rightarrow i = i'$$



Yksi moneen

$$C = \{(i,n_i) \mid i \in I, n_i \subset O\}$$

C - Kytcentöjen kuvaus tai yksi kentän tila

Kytcentäkentän kompleksisuus

- ✓ Kytcentäkentän kompleksisuus on likimain sama kuin kytcentäpisteiden lukumäärä.
- ✓ G on kytcentäkentän erilaisten, sallittujen kytcentöjen $C\{i,o\}$ kuvaus.
- ✓ $\zeta(G)$ on $\log_2(G)$ eli logaritmi erilaisten, sallittujen kytcentöjen määrästä. ($\sim$ kytcentäpisteiden lukumäärä)
- ✓ $\zeta(G)$ käytetään kytcentäkentän kompleksisuuden aproksimoinnissa, sillä $N \times N$ -ristikytcentämatriisi sisältää suurimman määrän kytcentäpisteitä vastaavan kokoisista kytcentäkentistä.
 - Mikäli ristikytcentämatriisissa on R-kytcentäpistettä, on siinä maksimissaan 2^R erillistä tilaa (jokaisen kytcentäpisteen auki/kiinni -tila), minkä takia $\zeta \leq R$ (osa ratkaisista ei ole sallittuja).

Kompleksisuuden alaraja

- ✓ Oletetaan että kytkentäkenttä on $N \times N$ ja sen rakenne on täysiulotteinen.
- ✓ $G = N!$
- ✓ $\zeta = \log_2(N!) \sim N \log_2(N) - 1,44N + \frac{1}{2} \log_2(N)$
- ✓ Benes -verkkolle on

$$\zeta \sim (N/2)(2 \log_2 N - 1) = N \log_2(N) - \frac{1}{2}N$$

eli likimain minimimäärä kytkimiä.

Benes -verkon kasvu

