

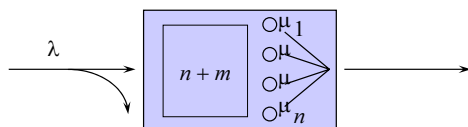
## 9. Jakojärjestelmät

### Sisältö

- Kertausta: yksinkertainen liikenneteoreettinen malli
- M/M/1-PS ( $\infty$  asiakasta, 1 palvelija,  $\infty$  asiakaspaikkaa)
- M/M/n-PS ( $\infty$  asiakasta,  $n$  palvelijaa,  $\infty$  asiakaspaikkaa)
- Sovellus elastisen dataliikenteen mallintamiseen vuotasolla
- M/M/1/k/k-PS ( $k$  asiakasta, 1 palvelija,  $k$  asiakaspaikkaa)

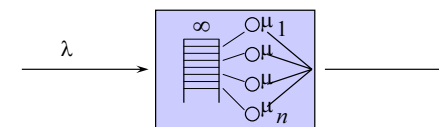
### Yksinkertainen liikenneteoreettinen malli

- **Asiakkaita saapuu** keskimäärin nopeudella  $\lambda$  (asiakasta per aikayks.)
  - $1/\lambda$  = keskimääräinen asiakkaiden väliaika
- **Asiakkaita palvelee**  $n$ :llä rinnakkaisella palvelijalla
- Kukin palvelija palvelee keskim. nopeudella  $\mu$  (asiakasta per aikayks.)
  - $1/\mu$  = keskimääräinen asiakkaan palveluaika
- Järjestelmässä on  $n + m$  **asiakaspaikkaa**
  - vähintään  $n$  palvelupaikkaa ja korkeintaan  $m$  odotuspaikkaa
- Estyvät asiakkaat (joiden saapuessa järjestelmä on **täysi**) menetetään



### Puhdas jakojärjestelmä

- Äärellinen määrä palvelijoita ( $n < \infty$ ), ääretön määrä palvelupaikkoja ( $n + m = \infty$ ), ei odotuspaikkoja, PS-jonokuri
  - Jos systeemissä on korkeintaan  $n$  asiakasta ( $x \leq n$ ), jokaisella asiakkaalla on oma palvelijansa. Jos asiakkaita taas on enemmän ( $x > n$ ), niin kokonaispalvelu ( $n\mu$ ) jaetaan tasan kaikkien asiakkaiden kesken.
  - Asiakkaan saama palveluintensiteetti on siten  $\min\{\mu, n\mu/x\}$
  - Yhtäkään asiakasta ei menetetä, eikä kenenkään tarvitse edes odottaa palveluun pääsyä. Siis estoton järjestelmä.
  - Toisaalta asiakkaiden palvelu viivästyy sitä enemmän mitä enemmän systeemissä on asiakkaita. Viive siis kiinnostava suure.



## Sisältö

- Kertausta: yksinkertainen liikenneteoreettinen malli
- M/M/1-PS ( $\infty$  asiakasta, 1 palvelija,  $\infty$  asiakaspaikkaa)
- M/M/n-PS ( $\infty$  asiakasta,  $n$  palvelijaa,  $\infty$  asiakaspaikkaa)
- Sovellus elastisen dataliikenteen mallintamiseen vuotasolla
- M/M/1/k/k-PS ( $k$  asiakasta, 1 palvelija,  $k$  asiakaspaikkaa)

5

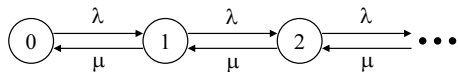
## M/M/1-PS jono

- Tarkastellaan seuraavanlaista yksinkertaista liikenneteoreettista mallia:
  - ääretön määrä riippumattomia käyttäjiä ( $k = \infty$ )
  - saapumisten väliajat IID noudattaen  $\text{Exp}(\lambda)$ -jakaumaa odotusarvoon  $1/\lambda$ 
    - saapumisprosessi on siis Poisson-prosessi intensiteettinään  $\lambda$
  - yksi palvelija ( $n = 1$ )
  - palveluvaatimukset IID noudattaen  $\text{Exp}(\mu)$ -jakaumaa odotusarvoon  $1/\mu$
  - ääretön määrä asiakaspaikkoja ( $p = \infty$ )
  - jonokuri: **PS**. Kaikkia systeemissä olevia asiakkaita siis palvellaan yhtäaikaan tasapuolisesti niin, että palvelukapasiteetti  $\mu$  jaetaan tasan kaikkien asiakkaiden kesken.
- **Huom.**
  - Kendallin merkinnöillä kyseessä on M/M/1-PS jonomalli
- **Merkintä:**
  - $\rho = \lambda/\mu = (\text{liikenne})\text{kuorma}$

6

## Tilasiirtymäkaavio

- Tark. järjestelmässä olevien asiakkaiden lkm:ää  $X(t)$  ajan  $t$  funktiona
  - Oletetaan, että  $X(t) = i$  jollakin hetkellä  $t$
  - Lyhyellä aikavälillä  $(t, t+h]$  voi tapahtua seuraavaa:
    - tn:llä  $\lambda h + o(h)$  systeemiin saapuu uusi asiakas (aiheuttaen tilasiirtymän  $i \rightarrow i+1$ )
    - jos  $i > 0$ , niin tn:llä  $i(\mu h) + o(h) = \mu h + o(h)$  jonkun palvelussa olevan asiakkaan palvelu päättyy (aiheuttaen tilasiirtymän  $i \rightarrow i-1$ )
- Prosessi  $X(t)$  on selvästikin Markov-prosessi tilasiirtymäkaavionaan



- **Huom.** Kyseessä on siis täsmälleen sama pelkistymätön sk-prosessi äärettömällä tila-avaruudella  $S = \{0, 1, 2, \dots\}$  kuin M/M/1-FIFO jonolla

7

## Tasapainojakauma (1)

- Lähdetään liikkeelle lokaaleista tasapainoyhtälöistä:

$$\pi_i \lambda = \pi_{i+1} \mu \quad (\text{LBE})$$

$$\Rightarrow \pi_{i+1} = \frac{\lambda}{\mu} \pi_i = \rho \pi_i$$

$$\Rightarrow \pi_i = \rho^i \pi_0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

- Sovelletaan sitten jakaumaehto:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = \pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i = 1 \quad (\text{N})$$

$$\Rightarrow \pi_0 = \left( \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \right)^{-1} = \left( \frac{1}{1-\rho} \right)^{-1} = 1 - \rho, \quad \text{jos } \rho < 1$$

8

## Tasapainojakauma (2)

- Stabiilille systeemille (siis kun  $\rho < 1$ ) systeemissä olevien asiakkaiden lkm  $X$  noudattaa tasapainotilanteessa siis **geometristä jakaumaa**:

$$\rho < 1 \Rightarrow X \sim \text{Geom}(\rho)$$

$$P\{X = i\} = \pi_i = (1 - \rho)\rho^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$E[X] = \frac{\rho}{1 - \rho}, \quad D^2[X] = \frac{\rho}{(1 - \rho)^2}$$

- Huom.** Insensitiivisyys palveluajan jakauman suhteen
  - Itse asiassa PS-jonokurin tapauksessa tulos pätee yleisemminkin: eksponentiaalisen palveluaika-jakauman sijasta voidaan palveluajalle valita mikä tahansa jakauma, jonka odotusarvo on  $1/\mu$
  - Voimme siis M/M/1-PS mallin sijasta tarkastella yleisempää M/G/1-PS mallia

9

## Keskimääräinen viive

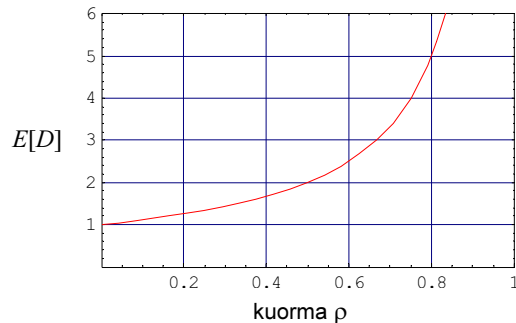
- Merkitään  $D$ :llä asiakkaan koko systeemissäoloaikaa eli viivettä
- Koska keskimääräinen systeemissäolevien lukumäärä  $E[X]$  on sama kaikille työnsäilyttävillä jonokureille, sama pätee Littlen kaavan nojalla myös keskimääräiselle viiveelle  $E[D]$ .
- Voidaan siis käyttää FIFO-jonokurille luennolla 8 johdettua tulosta:

$$E[D] = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1 - \rho}$$

10

## Keskimääräinen viive $E[D]$ kuorman $\rho$ funktiona

- Huom. Viiveen yksikkönä käytetty keskimääräistä palveluvaatimusta  $E[S]$



11

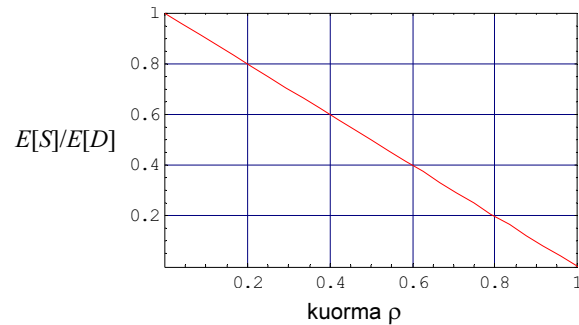
## Suhteellinen läpäisy nopeus

- Asiakkaan kokema palvelun laatua kuvaa suhteellinen läpäisy nopeus  $E[S]/E[D]$ :

$$\frac{E[S]}{E[D]} = \frac{1}{\mu} \cdot \mu(1 - \rho) = 1 - \rho$$

12

## Suhteellinen läpäisy nopeus $E[S]/E[D]$ kuorman $\rho$ funktiona



13

## Sisältö

- Kertausta: yksinkertainen liikenneteoreettinen malli
- M/M/1-PS ( $\infty$  asiakasta, 1 palvelija,  $\infty$  asiakaspaikkaa)
- M/M/n-PS ( $\infty$  asiakasta,  $n$  palvelijaa,  $\infty$  asiakaspaikkaa)
- Sovellus elastisen dataliikenteen mallintamiseen vuotasolla
- M/M/1/k/k-PS ( $k$  asiakasta, 1 palvelija,  $k$  asiakaspaikkaa)

14

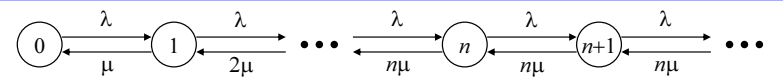
## M/M/n-PS jono

- Tarkastellaan seuraavanlaista yksinkertaista liikenneteoreettista mallia:
  - ääretön määrä riippumattomia käyttäjiä ( $k = \infty$ )
  - saapumisten väliajat IID noudattaen  $\text{Exp}(\lambda)$ -jakaumaa odotusarvoaan  $1/\lambda$ 
    - saapumisprosessi on siis Poisson-prosessi intensiteettinään  $\lambda$
  - äärellinen määrä palvelijoita ( $n < \infty$ )
  - palveluvaatimukset IID noudattaen  $\text{Exp}(\mu)$ -jakaumaa odotusarvoaan  $1/\mu$
  - ääretön määrä asiakaspaikkoja ( $p = \infty$ )
  - jonokuri: **PS**. Jos systeemissä on korkeintaan  $n$  asiakasta ( $i \leq n$ ), jokaisella asiakkaalla on oma palvelijansa. Jos asiakkaita taas on enemmän ( $i > n$ ), niin kokonaispalvelu ( $n\mu$ ) jaetaan tasan kaikkien asiakkaiden kesken.
- **Huom.**
  - Kendallin merkinnöillä kyseessä on M/M/n-PS jonomalli
- **Merkintä:**
  - $\rho = \lambda/(n\mu)$  = (liikenne)kuorma (palvelijaa kohti)

15

## Tilasiirtymäkaavio

- Tark. järjestelmässä olevien asiakkaiden lkm:ää  $X(t)$  ajan  $t$  funktiona
  - Oletetaan, että  $X(t) = i$  jollakin hetkellä  $t$
  - Lyhyellä aikavälillä  $(t, t+h]$  voi tapahtua seuraavaa:
    - tn:llä  $\lambda h + o(h)$  systeemiin saapuu uusi asiakas (aiheuttaen tilasiirtymän  $i \rightarrow i + 1$ )
    - jos  $i > 0$ , niin tn:llä  $i \cdot \min\{\mu, n\mu/i\} \cdot h + o(h) = \min\{i, n\} \cdot \mu h + o(h)$  jonkun palvelussa olevan asiakkaan palvelu päättyy (aiheuttaen tilasiirtymän  $i \rightarrow i - 1$ )
- Prosessi  $X(t)$  on selvästikin Markov-prosessi tilasiirtymäkaavionsaan



- **Huom.** Kyseessä on siis täsmälleen sama pelkistämätön sk-prosessi äärettömällä tila-avaruudella  $S = \{0, 1, 2, \dots\}$  kuin M/M/n-FIFO-jonolla

16

### Tasapainojakauma (1)

- Lokaalit tasapainoyhtälöt tapauksessa  $i < n$ :

$$\pi_i \lambda = \pi_{i+1} (i+1) \mu \quad (\text{LBE})$$

$$\Rightarrow \pi_{i+1} = \frac{\lambda}{(i+1)\mu} \pi_i = \frac{n\rho}{i+1} \pi_i$$

$$\Rightarrow \pi_i = \frac{(n\rho)^i}{i!} \pi_0, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

- Lokaalit tasapainoyhtälöt tapauksessa  $i \geq n$ :

$$\pi_i \lambda = \pi_{i+1} n \mu \quad (\text{LBE})$$

$$\Rightarrow \pi_{i+1} = \frac{\lambda}{n\mu} \pi_i = \rho \pi_i$$

$$\Rightarrow \pi_i = \rho^{i-n} \pi_n = \rho^{i-n} \frac{(n\rho)^n}{n!} \pi_0 = \frac{n^n \rho^i}{n!} \pi_0, \quad i = n, n+1, \dots$$

### Tasapainojakauma (3)

- Stabiilille systeemille (siis kun  $\rho < 1$  eli  $\lambda < n\mu$ ) systeemissä olevien asiakkaiden lkm:n  $X$  tasapainojakauma on siis seuraavanlainen:

$$\rho < 1 \Rightarrow$$

$$P\{X = i\} = \pi_i = \begin{cases} \frac{(n\rho)^i}{i!} \cdot \frac{1}{\alpha + \beta}, & i = 0, 1, \dots, n \\ \frac{n^n \rho^i}{n!} \cdot \frac{1}{\alpha + \beta}, & i = n, n+1, \dots \end{cases}$$

- Huom.** Insensitiivisyys palveluajan jakauman suhteen
  - Itse asiassa PS-jonokurin tapauksessa tulos pätee yleisemminkin: eksponentiaalisen palveluaika-jakauman sijasta voidaan palveluajalle valita mikä tahansa jakauma, jonka odotusarvo on  $1/\mu$
  - Voimme siis M/M/n-PS mallin sijasta tarkastella yleisempää M/G/n-PS mallia

### Tasapainojakauma (2)

- Jakaumaehto:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = \pi_0 \left( \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n\rho)^i}{i!} + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{n^n \rho^i}{n!} \right) = 1 \quad (\text{N})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \pi_0 &= \left( \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n\rho)^i}{i!} + \frac{(n\rho)^n}{n!} \sum_{i=n}^{\infty} \rho^{i-n} \right)^{-1} \\ &= \left( \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n\rho)^i}{i!} + \frac{(n\rho)^n}{n!(1-\rho)} \right)^{-1} = \frac{1}{\alpha + \beta}, \quad \text{jos } \rho < 1 \end{aligned}$$

$$\text{Merkintä: } \alpha = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n\rho)^i}{i!}, \quad \beta = \frac{(n\rho)^n}{n!(1-\rho)}$$

### Keskimääräinen viive

- Merkitään  $D$ :llä asiakkaan koko systeemissäoloaikaa eli viivettä
- Koska keskimääräinen systeemissäolevien lukumäärä  $E[X]$  on sama kaikille työnsäilyttävälle jonokureille, sama pätee Littlen kaavan nojalla myös keskimääräiselle viiveelle  $E[D]$ .
- Voidaan siis käyttää FIFO-jonokurille luennolla 8 johdettua tulosta:

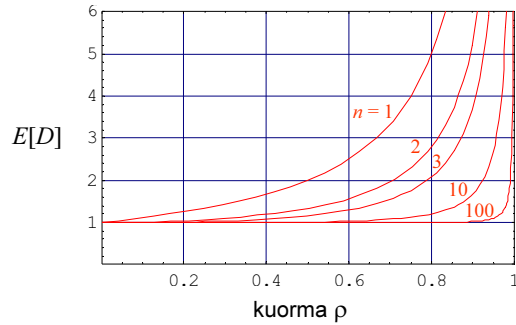
$$E[D] = \frac{1}{\mu} \cdot \left( \frac{p_w}{n(1-\rho)} + 1 \right)$$

- missä  $p_w$  viittaa todennäköisyyteen

$$p_w = P\{X^* \geq n\} = \sum_{i=n}^{\infty} \pi_i = \sum_{i=n}^{\infty} \pi_0 \cdot \frac{n^n \rho^i}{n!} = \pi_0 \cdot \frac{(n\rho)^n}{n!(1-\rho)} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$$

### Keskimääräinen viive $E[D]$ kuorman $\rho$ funktiona

- Huom. Viiveen yksikkönä käytetty keskimääräistä palveluvaatimusta  $E[S]$



21

### Suhteellinen läpäisy nopeus

- Asiakkaan kokema palvelun laatua kuvaa suhteellinen läpäisy nopeus  $E[S]/E[D]$ :

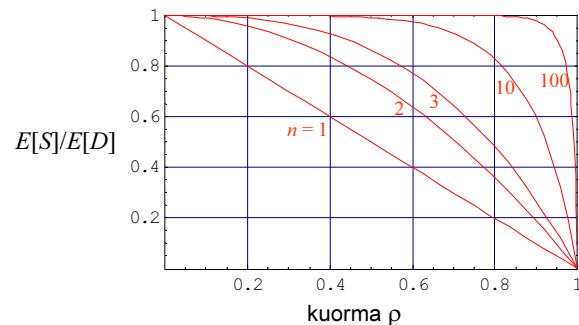
$$\frac{E[S]}{E[D]} = \frac{1}{\mu} \cdot \mu \cdot \frac{n(1-\rho)}{p_W(n)+n(1-\rho)} = \frac{n(1-\rho)}{p_W(n)+n(1-\rho)}$$

$$n = 1: \frac{E[S]}{E[D]} = \frac{1-\rho}{p_W(1)+1-\rho} = 1 - \rho$$

$$n = 2: \frac{E[S]}{E[D]} = \frac{2(1-\rho)}{p_W(2)+2(1-\rho)} = 1 - \rho^2$$

22

### Suhteellinen läpäisy nopeus $E[S]/E[D]$ kuorman $\rho$ funktiona



23

### Sisältö

- Kertausta: yksinkertainen liikenneteoreettinen malli
- M/M/1-PS ( $\infty$  asiakasta, 1 palvelija,  $\infty$  asiakaspaikkaa)
- M/M/n-PS ( $\infty$  asiakasta, n palvelijaa,  $\infty$  asiakaspaikkaa)
- Sovellus elastisen dataliikenteen mallintamiseen vuotasolla
- M/M/1/k/k-PS (k asiakasta, 1 palvelija, k asiakaspaikkaa)

24

## Sovellus elastisen dataliikenteen mallintamiseen vuotasolla

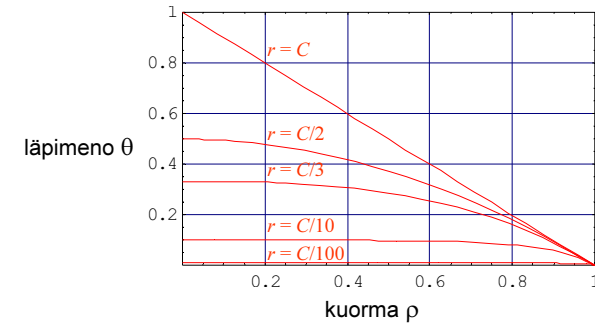
- M/M/n-PS-malli soveltuu elastisen dataliikenteen kuvaamiseen vuotasolla
  - asiakas = TCP-vuoto
  - $\lambda$  = uusien voien saapumisintensiteetti (vuoto per aikayks.)
  - $r$  = yksittäisen vuon liityntälinkin nopeus (datayks. per aikayks.)
  - $C = nr$  = voiden jakaman linkin bittinopeus (datayks. per aikayks.)
  - $E[L]$  = keskimääräinen vuon koko (datayks.)
  - $E[S] = 1/\mu = E[L]/r$  = keskimääräinen vuon lähetysaika liityntänopeudella
  - $\rho = \lambda/(n\mu) = \text{kuorma}$
- Palvelun laatua mittaa vuon läpimeno eli keskimäär. lähetysnopeus

$$\theta = \frac{E[L]}{E[D]} = \frac{r \cdot E[S]}{E[D]} = \frac{r \cdot n(1-\rho)}{p_W(n) + n(1-\rho)} = C \cdot \frac{(1-\rho)}{p_W(n) + n(1-\rho)}$$

25

## Läpimeno $\theta$ kuorman $\rho$ funktiona

- Huom. Läpimeno yksikkönä käytetty täyttä linkinopeutta  $C$



26

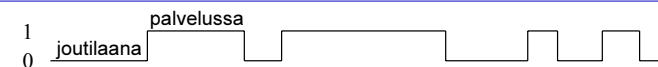
## Sisältö

- Kertausta: yksinkertainen liikenneteoreettinen malli
- M/M/1-PS ( $\infty$  asiakasta, 1 palvelija,  $\infty$  asiakaspaikkaa)
- M/M/n-PS ( $\infty$  asiakasta,  $n$  palvelijaa,  $\infty$  asiakaspaikkaa)
- Sovellus elastisen dataliikenteen mallintamiseen vuotasolla
- M/M/1/k/k-PS ( $k$  asiakasta, 1 palvelija,  $k$  asiakaspaikkaa)

27

## M/M/1/k/k-PS jono

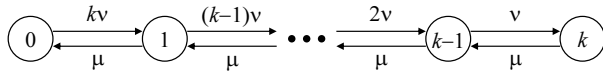
- Tarkastellaan seuraavanlaista yksinkertaista liikenneteoreettista mallia:
  - äärellinen** määrä riippumattomia asiakkaita ( $k < \infty$ )
    - asiakkaat **on-off-tyyppisiä** (siis välillä 'joutilaana' ja välillä 'palvelussa')
  - joutenoloajat IID noudattaen  $\text{Exp}(\nu)$ -jakaumaa odotusarvolla  $1/\nu$
  - yksi palvelija ( $n = 1$ )
  - palveluvaateet IID noudattaen  $\text{Exp}(\mu)$ -jakaumaa odotusarvolla  $1/\mu$
  - jokaisella asiakkaalla oma asiakaspaikka ( $p = k$ )
  - jonokuri: **PS**
- Huom.**
  - Kendallin merkinnöillä kyseessä on **M/M/1/k/k-PS** jonomalli
- On-off tyyppinen asiakas:



28

## Tilasiirtymäkaavio

- Tark. järjestelmässä olevien asiakkaiden lkm:ää  $X(t)$  ajan  $t$  funktiona
  - Oletetaan, että  $X(t) = i$  jollakin hetkellä  $t$
  - Lyhyellä aikavälillä  $(t, t+h]$  voi tapahtua seuraavaa:
    - jos  $i < k$ , niin tn:llä  $(k-i)v h + o(h)$  joku joutilaina olevista asiakkaista siirtyy palveluun (aiheuttaen tilasiirtymän  $i \rightarrow i+1$ )
    - jos  $i > 0$ , niin tn:llä  $i(\mu/i)h + o(h) = \mu + o(h)$  jonkun systeemissä olevan asiakkaan palvelu päättyy (aiheuttaen tilasiirtymän  $i \rightarrow i-1$ )
- Prosessi  $X(t)$  on selvästikin Markov-prosessi tilasiirtymäkaavionaan



- Huom.** Prosessi  $X(t)$  on pelkistymätön sk-prosessi äärellisellä tila-avaruudella  $S = \{0, 1, \dots, k\}$

29

## Tasapainojakauma (1)

- Lähdetään jälleen liikkeelle lokaaleista tasapainoyhtälöistä:

$$\pi_i(k-i)v = \pi_{i+1}\mu \quad (\text{LBE})$$

$$\Rightarrow \pi_i = \frac{\mu}{(k-i)v} \pi_{i+1}$$

$$\Rightarrow \pi_i = \frac{1}{(k-i)!} \left(\frac{\mu}{v}\right)^{k-i} \pi_k, \quad i = 0, 1, \dots, k$$

30

## Tasapainojakauma (2)

- Sovelletaan sitten jakaumaehtoa:

$$\sum_{i=0}^k \pi_i = \pi_k \sum_{i=0}^k \frac{1}{(k-i)!} \left(\frac{\mu}{v}\right)^{k-i} = 1 \quad (\text{N})$$

$$\Rightarrow \pi_k = \left( \sum_{i=0}^k \frac{1}{(k-i)!} \left(\frac{\mu}{v}\right)^{k-i} \right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \pi_i = \pi_k \cdot \frac{1}{(k-i)!} \left(\frac{\mu}{v}\right)^{k-i} = \frac{\frac{1}{(k-i)!} \left(\frac{v}{\mu}\right)^i}{\sum_{i'=0}^k \frac{1}{(k-i')!} \left(\frac{v}{\mu}\right)^{i'}}$$

31