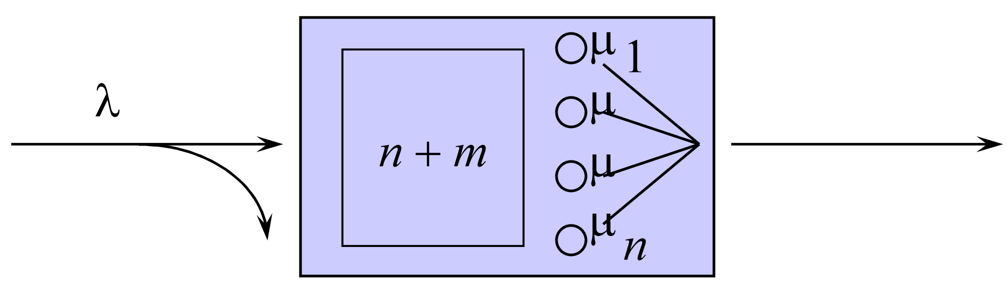
8. Jonotusjärjestelmät

Sisältö

- Kertausta: yksinkertainen liikenneteoreettinen malli
- Jonokuri
- M/M/1 (1 palvelija, ∞ odotuspaikkaa)
- Sovellus dataliikenteen mallintamiseen pakettitasolla
- M/M/n (n palvelijaa, ∞ odotuspaikkaa)

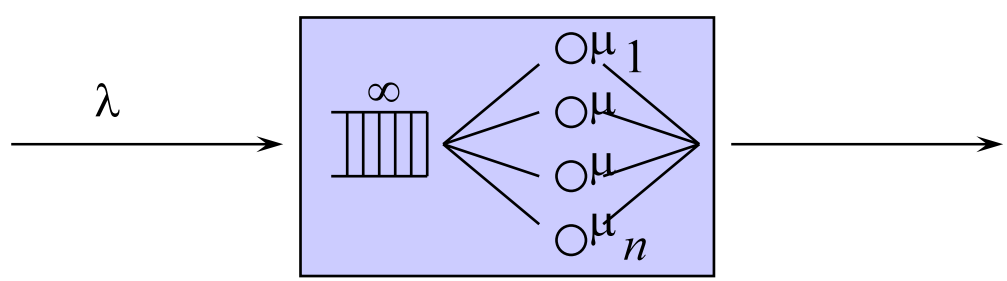
Yksinkertainen liikenneteoreettinen malli

- **Asiakkaita saapuu** keskimäärin nopeudella λ (asiakasta per aikayks.)
  - $1/\lambda$ = keskimääräinen asiakkaiden väliaika
- **Asiakkaita palvellaan** n:llä rinnakkaisella **palvelijalla**
- Kukin palvelija palvelee keskim. nopeudella μ (asiakasta per aikayks.)
  - $1/\mu$ = keskimääräinen asiakkaan palveluaika
- Järjestelmässä on $n + m$ **asiakaspaikkaa**
  - vähintään n **palvelupaikkaa** ja korkeintaan m **odotuspaikkaa**
- Estyvät asiakkaat (joiden saapuessa järjestelmä on **täysi**) menetetään



Puhdas jonotusjärjestelmä

- Äärellinen määrä palvelijoita ($n < \infty$), palvelupaikkoja n, ääretön määrä odotuspaikkoja ($m = \infty$)
  - Yhtäkään asiakasta ei menetetä, vaan jos asiakkaan saapuessa kaikki palvelijat ovat käytössä, ko. asiakas jää odottamaan järjestelmän sisälle palveluun pääsyä. Järjestelmä on siis **estoton**.
- Käyttäjän kokeman palvelun laadun kannalta kiinnostava suure on esim
  - todennäköisyys, että asiakas joutuu odottamaan kauemmin kuin jokin annettu referenssiaika (ts. "liian kauan")



Sisältö

- Kertausta: yksinkertainen liikenneteoreettinen malli
- Jonokuri
- M/M/1 (1 palvelija, ∞ odotuspaikkaa)
- Sovellus dataliikenteen mallintamiseen pakettitasolla
- M/M/n (n palvelijaa, ∞ odotuspaikkaa)

Jonokuri

- **Jonokuri** (queueing discipline) kertoo, miten palvelua tarjotaan systeemissä oleville asiakkaille
  - palvellaanko kerrallaan yhtä vai useampaa asiakasta
  - jos kerralla palvellaan vain yhtä asiakasta, missä järjestyksessä asiakkaat otetaan palveluun
  - jos taas kerralla palvellaan useampaa asiakasta, miten palvelijan kapasiteetti jaetaan palveltavien kesken
- **Huom**. Tietokonemaailmassa jonokuria vastaa käsite **vuoronjako** eli skedulointi (scheduling)
- **Määr**. Jonokuria sanotaan **työnsäilyttäväksi** (work-conserving), jos asiakkaita palvellaan täydellä palvelunopeudella μ aina, kun systeemissä on asiakkaita

Erilaisia työnsäilyttäviä jonokureja

- First In First Out (**FIFO**) = First Come First Served (FCFS)
  - oletusarvoinen jonokuri (yleensä ja tällä luennolla erityisesti)
  - tavallinen “jono” (asiakkaat palvellaan saapumisjärjestyksessä)
  - asiakkaita palvellaan yksi kerrallaan (täydellä palvelunopeudella μ)
  - palvelu kohdistuu aina siihen asiakkaaseen, joka on odottanut pisimpään
- Last In First Out (**LIFO**) = Last Come First Served (LCFS)
  - “pino” (stack)
  - asiakkaita palvellaan yksi kerrallaan (täydellä palvelunopeudella μ)
  - palvelu kohdistuu aina siihen asiakkaaseen, joka on odottanut lyhimpään
- Processor Sharing (**PS**)
  - tasapuolinen palvelu eli “reilu jonotus” (fair queueing)
  - kaikkia systeemissä olevia asiakkaita palvellaan yhtaikaa
  - kun systeemissä on i asiakasta, kukin näistä saa i:nnen osan palvelusta
  - käsitellään tarkemmin seuraavalla luennolla (9. Jakojärjestelmät)

Sisältö

- Kertausta: yksinkertainen liikenneteoreettinen malli
- Jonokuri
- M/M/1 (1 palvelija, ∞ odotuspaikkaa)
- Sovellus dataliikenteen mallintamiseen pakettitasolla
- M/M/n (n palvelijaa, ∞ odotuspaikkaa)

M/M/1 jono

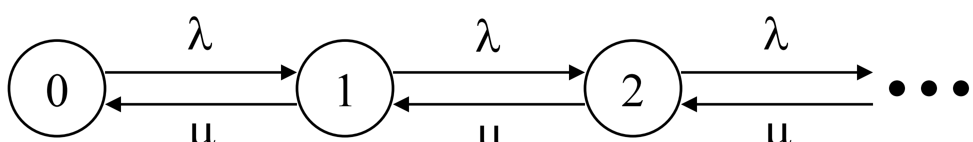
- Tarkastellaan seuraavanlaista yksinkertaista liikenneteoreettista mallia:
  - ääretön määrä riippumattomia käyttäjiä ($k = \infty$)
  - saapumisten väliajat IID noudattaen $\mathrm{Exp}(\lambda)$-jakaumaa odotusarvonaan $1/\lambda$
    - saapumisprosessi on siis Poisson-prosessi intensiteettinään λ
  - yksi palvelija ($n = 1$)
  - palveluajat IID noudattaen $\mathrm{Exp}(\mu)$-jakaumaa odotusarvonaan $1/\mu$
  - ääretön määrä odotuspaikkoja ($m = \infty$)
  - oletusarvoinen jonokuri: **FIFO**
- **Huom**.
  - Kendallin merkinnöillä kyseessä on **M/M/1** -jonomalli (tarkemmin sanottuna M/M/1-FIFO)
- Merkintä:
  - $\rho = \lambda/\mu$ = (liikenne)kuorma

Kiinnostavia satunnaismuuttujia

- X = systeemissä olevien asiakkaiden lkm eli jonon pituus mielivaltaisena ajanhetkenä (tasapainotilanteessa)
- X^* = systeemissä olevien asiakkaiden lkm eli jonon pituus (tyypillisen) asiakkaan saapumishetkellä
- W = (tyypillisen) asiakkaan odotusaika
- S = (tyypillisen) asiakkaan palveluaika
- $D = W + S$ = (tyypillisen) asiakkaan systeemissäoloaika eli viive

Tilasiirtymäkaavio

- Tark. järjestelmässä olevien asiakkaiden lkm:ää $X(t)$ ajan t funktiona
  - Oletetaan, että $X(t) = i$ jollakin hetkellä t
  - Lyhyellä aikavälillä $(t, t+h]$ voi tapahtua seuraavaa:
    - tn:llä $\lambda h + o(h)$ systeemiin saapuu uusi asiakas (aiheuttaen tilasiirtymän $i \to i + 1$)
    - jos $i > 0$, niin tn:llä $\mu h + o(h)$ palvelussa olevan asiakkaan palvelu päättyy (aiheuttaen tilasiirtymän $i \to i - 1$)
- Prosessi $X(t)$ on selvästikin Markov-prosessi tilasiirtymäkaavionaan



- **Huom**. Prosessi $X(t)$ on pelkistymätön sk-prosessi äärettömällä tila-avaruudella $S = \{0,1,2,...\}$

Tasapainojakauma (1)

- Lähdetään liikkeelle lokaaleista tasapainoyhtälöistä:

$$\pi_i \lambda = \pi_{i+1} \mu \qquad \text{(LBE)}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_{i+1} = \frac{\lambda}{\mu} \pi_i = \rho \pi_i$$

$$\Rightarrow \quad \pi_i = \rho^i \pi_0, \quad i = 0,1,2,\ldots$$

- Sovelletaan sitten jakaumaehtoa:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = \pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i = 1 \qquad \text{(N)}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_0 = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \right)^{-1} = \left(\frac{1}{1-\rho} \right)^{-1} = 1 - \rho, \quad \text{jos } \rho < 1$$

Tasapainojakauma (2)

- Stabiilille systeemille (siis kun $\rho < 1$) systeemissä olevien asiakkaiden lkm X noudattaa tasapainotilanteessa siis **geometristä jakaumaa**:

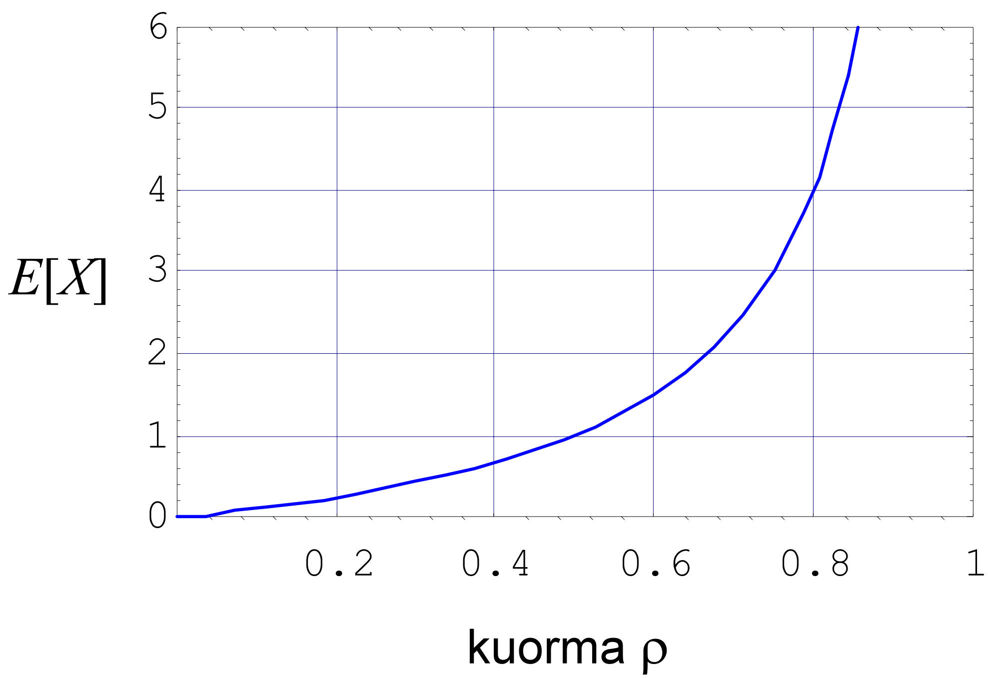
$$\rho < 1 \;\Rightarrow\; X \sim \mathrm{Geom}(\rho)$$

$$P\{X = i\} = \pi_i = (1-\rho)\rho^i, \quad i = 0,1,2,\ldots$$

$$E[X] = \frac{\rho}{1-\rho}, \quad D^2[X] = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

- **Huom**.
  - Tulos pätee **kaikille työnsäilyttäville** jonokureille (FIFO, LIFO, PS, …)
  - Ns. **symmetrisille** jonokureille (kuten LIFO ja PS mutta **ei FIFO**) tulos on **insensitiivi** palveluajan jakauman suhteen
  - Sen sijaan FIFO-jonokuria noudatettaessa jopa odotusarvo $E[X]$ vaihtelee palveluajan jakauman mukaan

Keskimääräinen jonon pituus $E[X]$ kuorman ρ funktiona



Keskimääräinen systeemissäoloaika

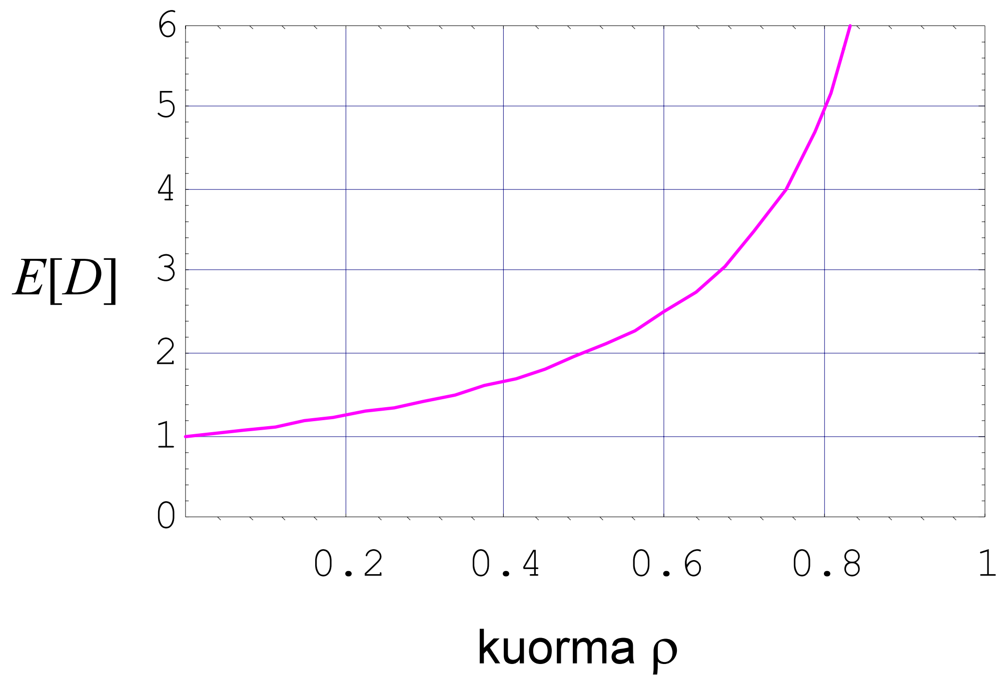
- Merkitään D:llä asiakkaan systeemissäoloaikaa eli viivettä
  - sisältäen sekä odotusajan W että palveluajan S: $D = W + S$
- Sovelletaan Littlen kaavaa: $E[X] = \lambda \cdot E[D]$.
  Näin ollen pätee

$$E[D] = \frac{E[X]}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

- **Huom**.
  - Keskimääräinen viive on sama kaikille työnsäilyttäville jonokureille (FIFO, LIFO, PS, …), mutta viiveen jakauma (ja siten esim. varianssi) sen sijaan riippuu käytetystä jonokurista

Keskimääräinen viive $E[D]$ kuorman ρ funktiona

– Huom. Viiveen yksikkönä käytetty keskimääräistä palveluaikaa



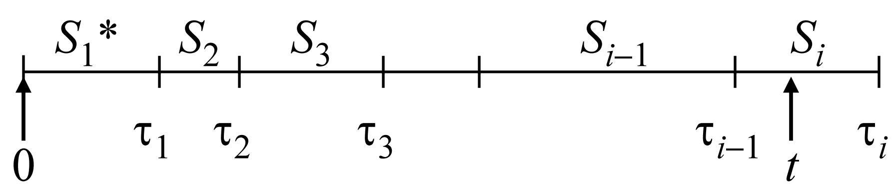
Keskimääräinen odotusaika

- Merkitään W:llä asiakkaan odotusaikaa
- Koska $W = D - S$, odotusajan odotusarvolle pätee

$$E[W] = E[D] - E[S] = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho} - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{1-\rho}$$

Odotusajan jakauma (1)

- Merkitään X^*:llä systeemissä olevien asiakkaiden lkm:ää asiakkaan saapumishetkellä
- PASTA-ominaisuuden nojalla: $P\{X^* = i\} = P\{X = i\} = \pi_i$
- Oletetaan nyt, että $X^* = i$
  - Odottavien asiakkaiden palveluajat $S_2,\ldots,S_i$ ovat IID ja $\sim \mathrm{Exp}(\mu)$
  - Eksponenttijakauman unohtavaisuusominaisuuden nojalla myös palvelussa olevan asiakkaan **jäljelläoleva** palveluaika $S_1^* \sim \mathrm{Exp}(\mu)$ (muista palveluajoista riippumatta)
  - FIFO-jonokurista seuraa, että $W = S_1^* + S_2 + \ldots + S_i$
  - Tarkastellaan Poisson-prosessia τ_n, missä $\tau_1 = S_1^*$ ja $\tau_n = S_1^* + S_2 + \ldots + S_n$, $n \geq 2$. Koska $X^* = i$, niin pätee $W > t \Leftrightarrow \tau_i > t$



Odotusajan jakauma (2)

- Koska lisäksi $W = 0 \Leftrightarrow X^* = 0$, saamme kaavat:

$$P\{W = 0\} = P\{X^* = 0\} = \pi_0 = 1 - \rho$$

$$P\{W > t\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{W > t \mid X^* = i\} P\{X^* = i\}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P\{\tau_i > t\} \pi_i = \sum_{i=1}^{\infty} P\{\tau_i > t\} (1 - \rho) \rho^i$$

- Olkoon sitten $A(t)$ pisteprosessia τ_n vastaava laskuriprosessi
  - Selvästikin $\tau_i > t \Leftrightarrow A(t) \leq i-1$
  - Toisaalta tiedetään, että $A(t) \sim \text{Poisson}(\mu t)$. Näin ollen

$$P\{\tau_i > t\} = P\{A(t) \leq i - 1\} = \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(\mu t)^j}{j!} e^{-\mu t}$$

Odotusajan jakauma (3)

- Yhdistämällä edellisen kalvon kaavat, saamme lopulta

$$P\{W > t\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{\tau_i > t\}(1-\rho)\rho^i$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(\mu t)^j}{j!} e^{-\mu t}(1-\rho)\rho^i$$

$$= \rho \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\mu t\rho)^j}{j!} e^{-\mu t}(1-\rho) \sum_{i=j+1}^{\infty} \rho^{i-(j+1)}$$

$$= \rho \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\mu t\rho)^j}{j!} e^{-\mu t} = \rho\, e^{\mu t\rho} e^{-\mu t} = \rho\, e^{-\mu(1-\rho)t}$$

Odotusajan jakauma (4)

- Näin ollen odotusaika W jakautuu kuten kahden riippumattoman sm:n $J \sim \mathrm{Bernoulli}(\rho)$ ja $D \sim \mathrm{Exp}(\mu(1-\rho))$ tulo: $W = JD$

$$P\{W=0\} = P\{J=0\} = 1-\rho$$

$$P\{W>t\} = P\{J=1, D>t\} = \rho \cdot e^{-\mu(1-\rho)t}, \quad t>0$$

$$E[W] = E[J]E[D] = \rho \cdot \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$E[W^2] = P\{J=1\}E[D^2] = \rho \cdot \frac{2}{\mu^2(1-\rho)^2} = \frac{1}{\mu^2} \cdot \frac{2\rho}{(1-\rho)^2}$$

$$D^2[W] = E[W^2] - E[W]^2 = \frac{1}{\mu^2} \cdot \frac{\rho(2-\rho)}{(1-\rho)^2}$$

Sisältö

- Kertausta: yksinkertainen liikenneteoreettinen malli
- Jonokuri
- M/M/1 (1 palvelija, ∞ odotuspaikkaa)
- Sovellus dataliikenteen mallintamiseen pakettitasolla
- M/M/n (n palvelijaa, ∞ odotuspaikkaa)

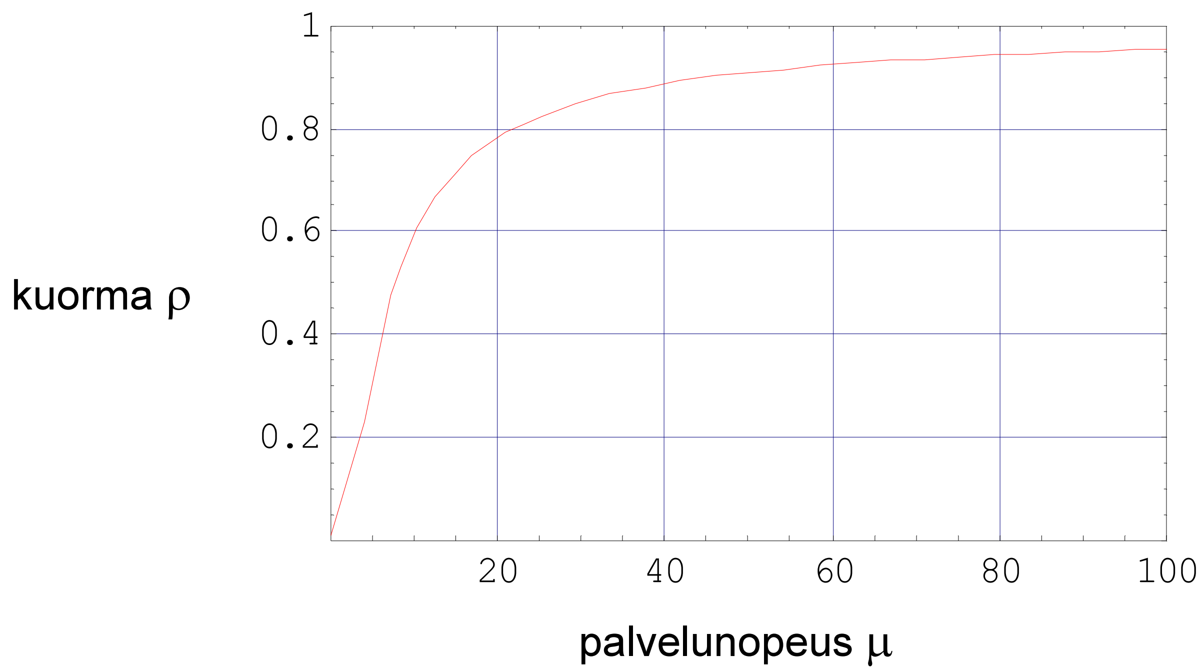
Sovellus dataliikenteen mallintamiseen pakettitasolla

- M/M/1-malli soveltuu (tietyin varauksin) dataliikenteen kuvaamiseen pakettitasolla
  - asiakas = IP-paketti
  - λ = uusien pakettien saapumisintensiteetti (pakettia per aikayks.)
  - $1/\mu$ = keskimääräinen paketin lähetysaika (aikayks.)
  - $\rho = \lambda/\mu$ = kuorma
- Palvelun laatua mittaa esim. paketin kokema viive
  - P_z = tn, että paketin täytyy odottaa “liian kauan”, so. kauemmin kuin annettu referenssiviive z

$$P_z = P\{W > z\} = \rho e^{-\mu(1-\rho)z}$$

Multipleksoitumisetu

- Lasketaan kuorma ρ siten että tn $P_z < 1\%$ kun $z = 1$ (aikayks.)
- **Multipleksoitumisetua** kuvaa kuorma ρ palvelunopeuden μ funktiona



Sisältö

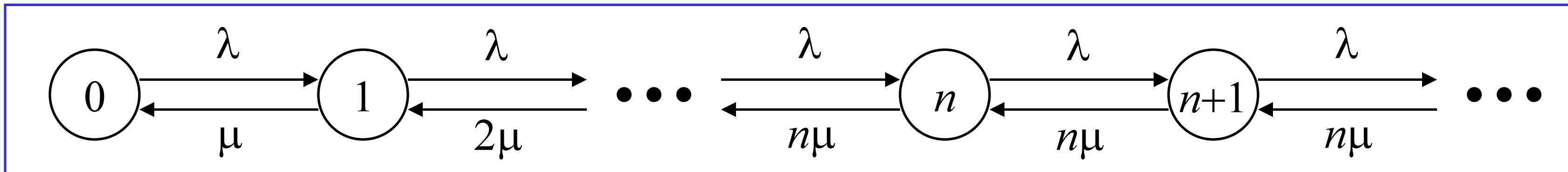
- Kertausta: yksinkertainen liikenneteoreettinen malli
- Jonokuri
- M/M/1 (1 palvelija, ∞ odotuspaikkaa)
- Sovellus dataliikenteen mallintamiseen pakettitasolla
- M/M/n (n palvelijaa, ∞ odotuspaikkaa)

M/M/n jono

- Tarkastellaan seuraavanlaista yksinkertaista liikenneteoreettista mallia:
  - ääretön määrä riippumattomia käyttäjiä ($k = \infty$)
  - saapumisten väliajat IID noudattaen $\mathrm{Exp}(\lambda)$-jakaumaa odotusarvonaan $1/\lambda$
    - saapumisprosessi on siis Poisson-prosessi intensiteettinään λ
  - äärellinen määrä palvelijoita ($n < \infty$)
  - palveluajat IID noudattaen $\mathrm{Exp}(\mu)$-jakaumaa odotusarvonaan $1/\mu$
  - ääretön määrä odotuspaikkoja ($m = \infty$)
  - oletusarvoinen jonokuri: **FCFS**
- **Huom**.
  - Kendallin merkinnöillä kyseessä on M/M/n -jonomalli (tarkemmin sanottuna M/M/n -FCFS)
- Merkintä:
  - $\rho = \lambda/(n\mu)$ = (liikenne)kuorma (palvelijaa kohti)

Tilasiirtymäkaavio

- Tark. järjestelmässä olevien asiakkaiden lkm:ää $X(t)$ ajan t funktiona
  - Oletetaan, että $X(t) = i$ jollakin hetkellä t
  - Lyhyellä aikavälillä $(t, t+h]$ voi tapahtua seuraavaa:
    - tn:llä $\lambda h + o(h)$ systeemiin saapuu uusi asiakas (aiheuttaen tilasiirtymän $i \to i + 1$)
    - jos $i > 0$, niin tn:llä $\min\{i,n\}\cdot\mu h + o(h)$ jonkun palvelussa olevan asiakkaan palvelu päättyy (aiheuttaen tilasiirtymän $i \to i - 1$)
- Prosessi $X(t)$ on selvästikin Markov-prosessi tilasiirtymäkaavionaan



- **Huom**. Prosessi $X(t)$ on pelkistymätön sk-prosessi äärettömällä tila-avaruudella $S = \{0,1,2,...\}$

Tasapainojakauma (1)

- Lokaalit tasapainoyhtälöt tapauksessa $i < n$:

$$\pi_i \lambda = \pi_{i+1}(i+1)\mu \qquad \text{(LBE)}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_{i+1} = \frac{\lambda}{(i+1)\mu}\pi_i = \frac{n\rho}{i+1}\pi_i$$

$$\Rightarrow \quad \pi_i = \frac{(n\rho)^i}{i!}\pi_0, \quad i = 0,1,\ldots,n$$

- Lokaalit tasapainoyhtälöt tapauksessa $i \geq n$:

$$\pi_i \lambda = \pi_{i+1} n\mu \qquad \text{(LBE)}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_{i+1} = \frac{\lambda}{n\mu}\pi_i = \rho\pi_i$$

$$\Rightarrow \quad \pi_i = \rho^{i-n}\pi_n = \rho^{i-n}\frac{(n\rho)^n}{n!}\pi_0 = \frac{n^n\rho^i}{n!}\pi_0, \quad i = n, n+1, \ldots$$

Tasapainojakauma (2)

- Jakaumaehto:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i = \pi_0\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(n\rho)^i}{i!}+\sum_{i=n}^{\infty}\frac{n^n\rho^i}{n!}\right)=1 \qquad \text{(N)}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_0 = \left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(n\rho)^i}{i!}+\frac{(n\rho)^n}{n!}\sum_{i=n}^{\infty}\rho^{i-n}\right)^{-1}$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(n\rho)^i}{i!}+\frac{(n\rho)^n}{n!(1-\rho)}\right)^{-1} = \frac{1}{\alpha+\beta}, \quad \text{jos } \rho<1$$

$$\text{Merkintä}: \quad \alpha = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(n\rho)^i}{i!}, \quad \beta = \frac{(n\rho)^n}{n!(1-\rho)}$$

Tasapainojakauma (3)

- Stabiilille systeemille (siis kun $\rho < 1$ eli $\lambda < n\mu$) systeemissä olevien asiakkaiden lkm:n X tasapainojakauma on siis seuraavanlainen:

$$\rho < 1 \quad \Rightarrow$$

$$P\{X = i\} = \pi_i = \begin{cases} \dfrac{(n\rho)^i}{i!} \cdot \dfrac{1}{\alpha+\beta}, & i = 0,1,\ldots,n \\ \dfrac{n^n \rho^i}{n!} \cdot \dfrac{1}{\alpha+\beta}, & i = n, n+1, \ldots \end{cases}$$

$$n = 1: \;\; \alpha = 1, \;\; \beta = \frac{\rho}{1-\rho}, \;\; \pi_0 = \frac{1}{\alpha+\beta} = 1-\rho$$

$$n = 2: \;\; \alpha = 1 + 2\rho, \;\; \beta = \frac{2\rho^2}{1-\rho}, \;\; \pi_0 = \frac{1}{\alpha+\beta} = \frac{1-\rho}{1+\rho}$$

Todennäköisyys joutua odottamaan

- Merk. p_W:llä tn:ttä, että saapuva asiakas joutuu odottamaan, ja X^*:llä systeemissä olevien asiakkaiden lkm:ää asiakkaan saapumishetkellä
- Saapuva asiakas joutuu odottamaan täsmälleen silloin, kun kaikki palvelijat ovat varattuja hänen saapuessaan, joten

$$p_W = P\{X^* \geq n\}$$

- PASTA-ominaisuuden nojalla: $P\{X^* = i\} = P\{X = i\} = \pi_i$. Näin ollen

$$p_W = P\{X^* \geq n\} = \sum_{i=n}^{\infty} \pi_i = \sum_{i=n}^{\infty} \pi_0 \cdot \frac{n^n \rho^i}{n!} = \pi_0 \cdot \frac{(n\rho)^n}{n!(1-\rho)} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

$$n = 1: \quad p_W = \rho$$

$$n = 2: \quad p_W = \frac{2\rho^2}{1+\rho}$$

Keskimääräinen odottavien asiakkaiden lkm

- Merkitään X_W:llä odottavien asiakkaiden lkm:ää mielivaltaisena ajanhetkenä (tasapainotilanteessa). Tällöin

$$E[X_W] = \sum_{i=n}^{\infty}(i-n)\pi_i = \pi_0 \frac{(n\rho)^n}{n!(1-\rho)} \sum_{i=n}^{\infty}(i-n)\cdot(1-\rho)\rho^{i-n}$$

$$= p_W \cdot \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$n=1: \quad E[X_W] = p_W \cdot \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$n=2: \quad E[X_W] = p_W \cdot \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{2\rho^2}{1+\rho}\cdot\frac{\rho}{1-\rho} = \frac{2\rho^3}{1-\rho^2}$$

Keskimääräinen odotusaika

- Merkitään W:llä asiakkaan odotusaikaa
- Sovelletaan Littlen kaavaa: $E[X_W] = \lambda \cdot E[W]$. Näin ollen pätee

$$E[W] = \frac{E[X_W]}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot p_W \cdot \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{p_W}{n(1-\rho)} = p_W \cdot \frac{1}{n\mu - \lambda}$$

$$n = 1: \quad E[W] = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{p_W}{1-\rho} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$n = 2: \quad E[W] = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{p_W}{2(1-\rho)} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho^2}{1-\rho^2}$$

Keskimääräinen systeemissäoloaika

- Merkitään D:llä asiakkaan systeemissäoloaikaa eli viivettä
  - sisältäen sekä odotusajan W että palveluajan S: $D = W + S$
- Tällöin

$$E[D] = E[W] + E[S] = \frac{1}{\mu}\cdot\left(\frac{p_W}{n(1-\rho)} + 1\right) = p_W \cdot \frac{1}{n\mu - \lambda} + \frac{1}{\mu}$$

$$n = 1: \quad E[D] = \frac{1}{\mu}\cdot\left(\frac{p_W}{1-\rho} + 1\right) = \frac{1}{\mu}\cdot\left(\frac{\rho}{1-\rho} + 1\right) = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{1-\rho}$$

$$n = 2: \quad E[D] = \frac{1}{\mu}\cdot\left(\frac{p_W}{2(1-\rho)} + 1\right) = \frac{1}{\mu}\cdot\left(\frac{\rho^2}{1-\rho^2} + 1\right) = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{1-\rho^2}$$

Keskimääräinen systeemissäolevien asiakkaiden lkm

- Merkitään X:llä odottavien asiakkaiden lkm:ää mielivaltaisena ajanhetkenä (tasapainotilanteessa)
- Sovelletaan Littlen kaavaa: $E[X] = \lambda \cdot E[D]$. Näin ollen pätee

$$E[X] = \lambda \cdot E[D] = p_W \cdot \frac{\lambda}{n\mu - \lambda} + \frac{\lambda}{\mu} = p_W \cdot \frac{\rho}{1-\rho} + n\rho$$

$$n = 1: \quad E[X] = p_W \cdot \frac{\rho}{1-\rho} + \rho = \rho \cdot \frac{\rho}{1-\rho} + \rho = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$n = 2: \quad E[X] = p_W \cdot \frac{\rho}{1-\rho} + 2\rho = \frac{2\rho^2}{1+\rho} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} + 2\rho = \frac{2\rho}{1-\rho^2}$$

Odotusajan jakauma (1)

- Merkitään X^*:llä systeemissä olevien asiakkaiden lkm:ää asiakkaan saapumishetkellä
- Saapuva asiakas joutuu odottamaan täsmälleen silloin, kun $X^* \geq n$. Tämä tapahtuu tn:llä p_W.
- Oletetaan nyt, että $X^* = i \geq n$
  - Koska kaikki palvelijat ovat käytössä ainakin siihen asti, kunnes ko. saapuva asiakas lopulta pääsee palveluun, systeemi näyttää hänen kannaltaan sellaiselta M/M/1 jonolta, jonka palvelunopeus on $n\mu$ (ja kuorma ρ)
  - Merk. $X^{*\prime}$:lla systeemissä olevien asiakkaiden lkm:ää asiakkaan saapumishetkellä ja W':lla asiakkaan odotusaikaa tällaisessa M/M/1 jonossa. Tällöin

$$P\{W = 0\} = 1 - p_W$$

$$P\{W > t\} = P\{X^* \geq n\} P\{W > t \mid X^* \geq n\}$$

$$= p_W \cdot P\{W' > t \mid X^{*\prime} \geq 1\} = p_W \cdot e^{-n\mu(1-\rho)t}, \quad t > 0$$

Odotusajan jakauma (2)

- Näin ollen odotusaika W jakautuu kuten kahden riippumattoman sm:n $J \sim \text{Bernoulli}(p_W)$ ja $D' \sim \text{Exp}(n\mu(1-\rho))$ tulo: $W = JD'$

$$P\{W = 0\} = P\{J = 0\} = 1 - p_W$$

$$P\{W > t\} = P\{J = 1, D' > t\} = p_W \cdot e^{-n\mu(1-\rho)t}, \quad t > 0$$

$$E[W] = E[J]E[D'] = p_W \cdot \frac{1}{n\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{p_W}{n(1-\rho)}$$

$$E[W^2] = P\{J = 1\}E[D'^2] = p_W \cdot \frac{2}{n^2\mu^2(1-\rho)^2} = \frac{1}{\mu^2} \cdot \frac{2p_W}{n^2(1-\rho)^2}$$

$$D^2[W] = E[W^2] - E[W]^2 = \frac{1}{\mu^2} \cdot \frac{p_W(2-p_W)}{n^2(1-\rho)^2}$$

Esimerkki (1)

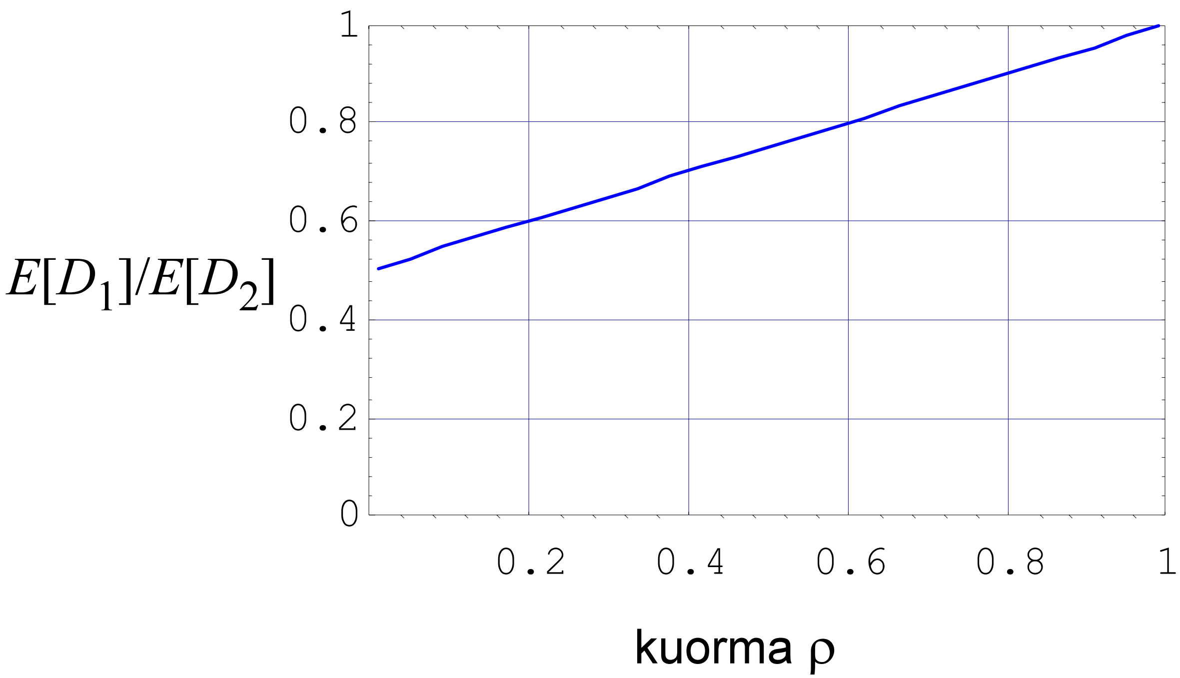
- "Kirjoitinongelma"
  - Tarkastellaan seuraavia vaihtoehtoisia konfiguraatioita:
    - Yksi nopea kirjoitin (IID printtausajat ~ $\mathrm{Exp}(2\mu)$)
    - Kaksi hidasta kirjoitinta rinnakkain (IID printtausajat ~ $\mathrm{Exp}(\mu)$)
  - Optimointikriteeri: minimoi keskimääräinen printtausviive $E[D]$
    - Yksi nopea kirjoitin (M/M/1 jonomalli kuormana $\rho = \lambda/(2\mu)$):

$$E[D_1] = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho}$$

- Kaksi hidasta kirjoitinta (M/M/2 jonomalli kuormana $\rho = \lambda/(2\mu)$):

$$E[D_2] = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho^2} = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{2}{(1-\rho)(1+\rho)} = E[D_1] \cdot \frac{2}{1+\rho} > E[D_1]$$

Esimerkki (2)



THE END