TEKNILLINEN KORKEAKOULU
Tietoverkkolaboratorio
S-38.1145 Liikenneteorian perusteet, Kevät 2007

Laskuharjoitus 3
6.2.2007

Tehtävät 2, 5 ja 6 ovat kotitehtäviä. Palautus viimeistään ti 6.2. klo 10.00 kurssin laatikkoon (G-siipi, 2. kerros) tai laskareiden alussa ti 6.2. klo 10.15 assistentille.

1. *Demo*
   Pysäkin ohi kulkee busseja säännöllisesti 15 min välein ja takseja (busseista riippumattomasti) Poisson-prosessin mukaisesti keskimäärin 15 min välein. Saavut paikalle satunnaisena ajanhetkenä.
   (a) Kuinka kauan joudut keskimäärin odottamaan bussia?
   (b) Kuinka kauan joudut keskimäärin odottamaan taksia?
   (c) Millä todennäköisyydellä joudut odottamaan pysäkillä yli 10 minuuttia ennen kuin ensimmäinen taksi tai bussi kulkee ohi?

2. *Kotitehtävä*
   Pakettiverkon eräällä linkillä kulkee keskimäärin 1 paketti millisekunnissa. Pakettien saapumisten oletetaan tapahtuvan Poisson-prosessin mukaisesti. Kukin paketti on muista riippumatta datapaketti todennäköisyydellä 0.9 ja kuittauspaketti todennäköisyydellä 0.1. Tarkastellaan mielivaltaista millisekunnin pituista ajanjaksoa.
   (a) Millä todennäköisyydellä linkillä havaitaan täsmälleen kaksi datapakettia eikä yhtään kuittauspakettia ko. ajanjaksolla.
   (b) Oletetaan nyt, että linkillä on havaittu täsmälleen kaksi pakettia ko. ajanjaksolla. Millä todennäköisyydellä molemmat ovat datapaketteja.

3. *Demo*
   Palvelimeen saapuu yhteyspyyntöjä Poisson-prosessin mukaisesti intensiteetillä λ. Jos palvelin ylikuormittuu, sen läpäisy romahtaa. Tämän estämiseksi palvelimessa sovelletaan välistykseen (gapping) perustuvaa ruuhkanhallintaa, jossa jokaisen sisäänotetun pyynnön jälkeen pidetään T:n kestoinen tauko, jolloin uusia palvelupyyntöjä ei oteta vastaan. Oletetaan, että tänä aikana saapuneet ja hylätyt palvelupyynnöt eivät uusiudu.
   (a) Montako palvelupyyntöä hyväksytään aikayksikköä kohti?
   (b) Mikä on tämä hyväksyttyjen palvelupyyntöjen taajuus, kun T on joko hyvin pieni tai hyvin suuri?

4. *Demo*
   Ns. Ehrenfestin mallia käytettiin aikanaan valaisemaan termodynamiikan toiseen pääsääntöön liittyvää näennäistä ristiriitaa. Malli voidaan kuvata seuraavasti. Suljettu järjestelmä muodostuu K:sta satunnaisesti liikkuvasta kaasumolekyylistä ja kahdesta säiliöstä, jotka on yhdistetty siten, että kukin molekyyli vaihtaa säiliötä riippumattomasti muista molekyyleistä vakiointensiteetillä λ. Merkitään $X(t)$:llä toisessa säiliössä olevien molekyylien lukumäärä.
   (a) Piirrä Markov-prosessin $X(t)$ tilasiirtymäkaavio.
   (b) Johda $X(t)$:n tasapainojakauma.
   (c) Vertaa todennäköisyyksiä $P\{X(t) = K \mid X(0) = \frac{K}{2}\}$ ja $P\{X(t) = \frac{K}{2} \mid X(0) = K\}$ (K parillinen), kun t on suuri.

5. *Kotitehtävä*
Markov-prosessin $X(t)$ tila-avaruus on $\{0,1,2,3\}$ ja tilasiirtymäintensiteetit q_{ij} on koottu siirtymämatriisiin $Q = (q_{ij} \mid i,j = 0,1,2,3)$, missä $q_{ii} = -q_i$ kaikilla i:

$$Q = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

(a) Piirrä $X(t)$:n tilasiirtymäkaavio.
(b) Johda $X(t)$:n tasapainojakauma.

6. *Kotitehtävä*
Markov-prosessin $X(t)$ tila-avaruus on $\{0,1,2,3\}$ ja tilasiirtymäintensiteetit q_{ij} on koottu siirtymämatriisiin $Q = (q_{ij} \mid i,j = 0,1,2,3)$, missä $q_{ii} = -q_i$ kaikilla i:

$$Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Piirrä $X(t)$:n tilasiirtymäkaavio.
(b) Johda $X(t)$:n tasapainojakauma.