

Tehtävät 2, 5 ja 6 ovat kotitehtäviä. Palautus viimeistään ti 7.2. klo 10.00 kurssin laatikkoon (G-siipi, 2. kerros) tai laskareiden alussa ti 7.2. klo 10.15 assistentille.

1. *Demo*

Pysäkin ohi kulkee busseja säännöllisesti 15 min välein ja takseja (busseista riippumattomasti) Poisson-prosessin mukaisesti keskimäärin 15 min välein. Saavut paikalle satunnaisena ajanhetkenä.

- (a) Kuinka kauan joudut keskimäärin odottamaan bussia?
- (b) Kuinka kauan joudut keskimäärin odottamaan taksia?
- (c) Millä todennäköisyydellä joudut odottamaan pysäkillä yli 10 minuuttia ennen kuin ensimmäinen taksi tai bussi kulkee ohi?

2. *Kotitehtävä*

Pakettiverkon eräällä linkillä kulkee keskimäärin 10 pakettia sekunnissa. Pakettien saapumisten oletetaan tapahtuvan Poisson-prosessin mukaisesti. Kukin paketti on muista riippumatta kuittauspaketti todennäköisyydellä 10 %. Tarkastellaan mielivaltaista sekunnin pituista ajanjaksoa.

- (a) Millä todennäköisyydellä linkillä kulkee ainakin yksi kuittauspaketti ko. ajanjaksolla?
- (b) Mikä on pakettien kokonaislukumäärän odotusarvo, jos ajanjaksolla on havaittu 4 kuittauspakettia?

3. *Demo*

Palvelimeen saapuu yhteyspyyntöjä Poisson-prosessin mukaisesti intensiteetillä λ . Jos palvelin ylikuormittuu, sen läpäisy romahtaa. Tämän estämiseksi palvelimessa sovelletaan välistykseen (gapping) perustuvaa ruuhkanhallintaa, jossa jokaisen sisäänotetun pyynnön jälkeen pidetään T :n kestoinen tauko, jolloin uusia palvelupyynnöitä ei oteta vastaan. Oletetaan, että tänä aikana saapuneet ja hylätyt palvelupyynnöt eivät uusiudu.

- (a) Montako palvelupyynnöitä hyväksytään aikayksikköä kohti?
- (b) Mikä on tämä hyväksytyjen palvelupyynnöiden taajuus, kun T on joko hyvin pieni tai hyvin suuri?

4. *Demo*

Ns. Ehrenfestin mallia käytettiin aikanaan valaisemaan termodynamiikan toiseen pääsääntöön liittyvää näennäistä ristiriitaa. Malli voidaan kuvata seuraavasti. Suljettu järjestelmä muodostuu K :sta satunnaisesti liikkuvasta kaasumolekyylistä ja kahdesta säiliöstä, jotka on yhdistetty siten, että kukin molekyyli vaihtaa säiliötä riippumattomasti muista molekyyleistä vakiointensiteetillä λ . Merkitään $X(t)$:llä toisessa säiliössä olevien molekyylien lukumäärä.

- (a) Piirrä Markov-prosessin $X(t)$ tilasiirtymäkaavio.
- (b) Johda $X(t)$:n tasapainojakauma.
- (c) Vertaa todennäköisyyksiä $P\{X(t) = K \mid X(0) = \frac{K}{2}\}$ ja $P\{X(t) = \frac{K}{2} \mid X(0) = K\}$ (K parillinen), kun t on suuri.

5. *Kotitehtävä*

Markov-prosessin $X(t)$ tila-avaruus on $\{0, 1, 2, 3\}$ ja tilasiirtymäintensiteetit q_{ij} on koottu siirtymämatriisiin $Q = (q_{ij} \mid i, j = 0, 1, 2, 3)$, missä $q_{ii} = -q_i$ kaikilla i :

$$Q = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Piirrä $X(t)$:n tilasiirtymäkaavio.

(b) Johda $X(t)$:n tasapainojakauma.

6. *Kotitehtävä*

Markov-prosessin $X(t)$ tila-avaruus on $\{0, 1, 2, 3\}$ ja tilasiirtymäintensiteetit q_{ij} on koottu siirtymämatriisiin $Q = (q_{ij} \mid i, j = 0, 1, 2, 3)$, missä $q_{ii} = -q_i$ kaikilla i :

$$Q = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Piirrä $X(t)$:n tilasiirtymäkaavio.

(b) Johda $X(t)$:n tasapainojakauma.