S-38.105 laskuharjoitukset K-98

Mika Ilvesmäki *
Teletekniikan laboratorio, TKK

7. toukokuuta 1998

Sisältö

1 Siirtotien ominaisuuksia 2.4.1998 **2**

1.1 Siirtotien tallennuskapasiteetti 2

1.1.1 Ratkaisu 2

1.2 Signaalin eteneminen siirtotiellä 2

1.2.1 Ratkaisu 2

1.3 Shannonin kaava ja puhelinlinjan kapasiteetti 3

1.3.1 Ratkaisu 4

2 Estojärjestelmät ja tilastollinen kanavoituminen 7.5.1998 **4**

2.1 Jono- ja estojärjestelmät 4

2.1.1 Ratkaisu 6

2.2 Tilastollinen kanavoituminen ATM:ssä 6

2.2.1 Ratkaisu 7

*E–mail:lynx@luuri.hut.fi

1 Siirtotien ominaisuuksia 2.4.1998

1.1 Siirtotien tallennuskapasiteetti

a) Kuinka suuri tallennuskapasiteetti on l =100 kilometrissä optista kuitua, jonka siirtonopeus $C = 155$Mbit/s ja signaalin etenemisnopeus on $v_s = 2 * 10^8$ m/s.

b) Entä kuinka monta bittiä on matkalla, mikäli satelliitin ja maa–aseman välillä, kun etäisyys on l =50000 km, siirtonopeus on $C = 50$kbit/s ja signaalin etenemisnopeus on $v_s = 3 * 10^8$ m/s.

1.1.1 Ratkaisu

Nähdään suoraan, että tallennuskapasiteetti V riippuu siirtotien pituudesta ja signaalin etenemisnopeudesta siten, että $V = l\frac{C}{v_s}$. Tähän sijoittamalla saadaan a)-kohdasta 77500 bittiä eli noin 9,7 ktavua ja b)-kohdasta 8333 bittiä eli noin 1 ktavu.

1.2 Signaalin eteneminen siirtotiellä

Johda siirtotien käyttöasteelle lauseke, kun yhteydellä täytyy jokainen saapunut kehys kuitata. Kehyksien ja kuittauksien käsittelyaika voidaan jättää huomiotta, jolloin merkittävät tekijät ovat t_{frame}, "aikaväli", jonka kehys varaa siirtotieltä ja aika t_{prop}, joka kuluu siirtotiellä olemiseen. Mikä on siirtotien käyttöaste siirtotien pituuden, l funktiona jos kehyksen pituus on 424 bittiä ja siirtotien nopeus on 155 Mbit/s. Entä siinä tapauksessa jos kehyksen pituus on 12000 bittiä ja siirtotien nopeus on 10 Mbit/s. Signaalin etenemisnopeus on $v_s = 2 \cdot 10^8$ m/s.

1.2.1 Ratkaisu

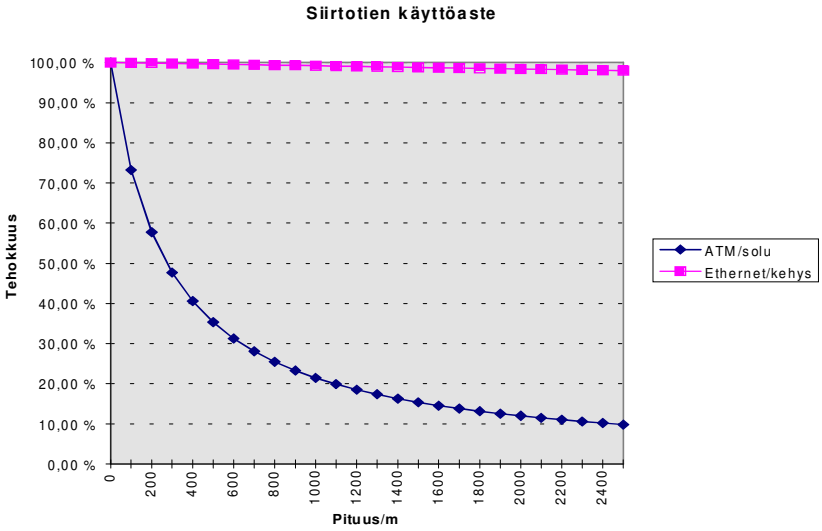
Nähdään melko helposti

$$U = \frac{t_{frame}}{2t_{prop} + t_{frame}} \tag{1}$$

ja mikäli siirtotien pituus vaihtelee saadaan

$$U = \frac{t_{frame}}{2\frac{l}{v_s} + t_{frame}} \tag{2}$$

Yhden 424 bitin kehyksen lähettäminen varaa nopeammalta siirtotieltä $424\frac{1}{155 \cdot 10^6} = 2,73\mu s$ pituisen aikavälin ja 12000 bitin kehyksen lähettäminen varaa hitaammalta siirtotieltä $12000\frac{1}{10 \cdot 10^6} = 0,0012s$ pituisen aikavälin. Sijoittamalla nämä 2 saadaan kuvan 1 mukainen käyttäytyminen.



Kuva 1: Siirtotien käyttöaste kahdella eri kehyksen koolla siirtotien pituuden funktiona

1.3 Shannonin kaava ja puhelinlinjan kapasiteetti

Laske kaavan 3 mukaan perinteisen puhelinyhteyden suurin mahdollinen tiedonsiirtokapasiteetti signaali/kohinasuhteen funktiona. Puhelinlinjan siirtokaista sijoittuu 300–3400 Hz:n taajuusalueelle. Alla (3) on annettu Shannonin kaava suurimman bittinopeuden arvolle, kun tunnetaan signaali/kohinasuhde ja käytetty kaistanleveys.

$$C = B \log_2(1 + \frac{S}{N}) bit/s \tag{3}$$

missä B on kaistanleveys ja S/N signaalikohinasuhde.

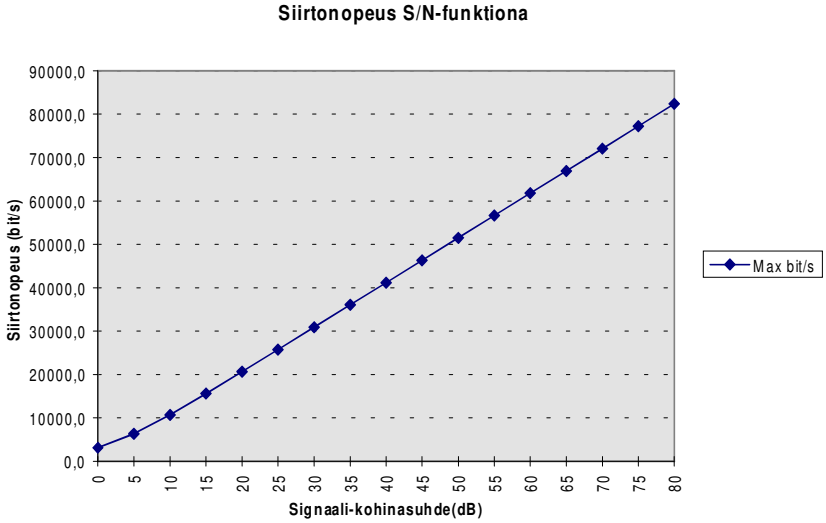
Kuinka suuri on teoreettinen siirtonopeus, jos signaali/kohinasuhde on $30dB$?

1.3.1 Ratkaisu

Kun tiedetään, että

$$(S/N)_{dB} = 10 \log \frac{P_s}{P_n} \tag{4}$$

ja jos tyypillinen signaalikohinasuhde on $30dB$, on $S/N = 1000 : 1$, joten $C = 3100 \log_2(1 + 1000)$ bit/s eli $30898,4$ bit/s. Suurimman siirtonopeuden ja signaalikohinasuhteen riippuvuus on esitetty kuvassa 2.



Kuva 2: Siirtotien maksimisiirtonopeus signaali/kohinasuhteen funktiona

2 Estojärjestelmät ja tilastollinen kanavoituminen 7.5.1998

2.1 Jono- ja estojärjestelmät

Tarkastellaan modeemipoolia, jossa on 5 modeemia. Uusia kutsuja tulee keskimäärin 5 minuutin välein ja yhteys kestää keskimäärin 15 minuuttia.

a) Kuinka suuri osa tulevista kutsuista estyy, jos kutsut eivät voi jäädä odottamaan (estojärjestelmä)?

Oletetaan seuraavissa kohdissa, että kutsut jäävät jonoon odottamaan modeemin vapautumista (M/M/S/∞–järjestelmä).

b) Kuinka suuri osa kutsuista joutuu odottamaan?

c) Mikä on keskimääräinen odotusaika?

d) Kuinka suuri osa kutsuista joutuu odottamaan yli 20 minuuttia?

Oletetaan, että jonotuspaikkoja on 5 kpl (M/M/S/N -järjestelmä).

e) Millä todennäköisyydellä kutsu jää jonoon? Entä millä todennäköisyydellä kutsu estyy (ei pääse edes jonoon?

Annetaan seuraavat valmiiksi johdetut kaavat:

- Erlangin estokaava kun A on liikenteen määrä erlangeissa ja S on palvelupaikkojen määrä:

$$B_e[A,S] = \frac{\frac{A^S}{S!}}{\sum_{i=0}^{S} \frac{A^i}{i!}} \tag{5}$$

  Tehtävän ratkaisussa voi käyttää, työvälineestä riippuen, Erlangin kaavaa rekursiomuodossa:

$$\begin{aligned} B_e[0] &= 1 \\ B_e[A,S+1] &= \frac{1}{1+\frac{S+1}{AB[A,S]}} = A\frac{B[A,S]}{(S+1)+AB[A,S]} \end{aligned} \tag{6}$$

- M/M/S/∞: Jonojärjestelmä, jossa tulo- ja palveluprosessi ovat Poisson-tyyppisiä, palvelimia on S kappaletta ja jonotuspaikkoja on äärettömästi.

  Jonottamaan joutuvien osuus (tai oikeammin todennäköisyys, että uusi asiakas joutuu odottamaan:

$$B_w[A,S] = \frac{1}{1+(\frac{1}{B_e[A,S]}-1)(1-\frac{A}{S})} \tag{7}$$

  Odotusajan pituuden todennäköisyys:

$$P[t_w > t, A, S] = B_w e^{-\frac{(S-A)t}{h}} \tag{8}$$

ja odotusajan odotusarvo:

$$E[t_w, A, S] = \frac{hB_w}{S - A} \tag{9}$$

jossa h on yhteyden keskimääräinen kestoaika.

- M/M/S/N: Samantyyppinen jonojärjestelmä kuin M/M/S/∞, mutta nyt jonotuspaikkoja on äärellinen määrä (N). Jonoon joutuvien osuus:

$$B_w[A, S, N] = \frac{1}{1 + \frac{(\frac{1}{B_e[A,S]} - 1)(1 - \frac{A}{S})}{1 - (\frac{A}{S})^{N+1}}} \tag{10}$$

Kokonaan järjestelmästä putoavien osuus:

$$B_t[A, S, N] = \frac{(1 - \frac{A}{S})(\frac{A}{S})^N}{1 - (\frac{A}{S})^{N+1}} B_w[A, S, N] \tag{11}$$

2.1.1 Ratkaisu

Kutsuintensiteetti on 0,2/min, ja yhteyksien keskimääräinen kesto on 15 min. Tarjottu liikenne $A = 0,2 \cdot 15 = 3$erl. Jos järjestelmässä ei ole jonotuspaikkoja on esto laskettava (5) tai (6) mukaan. Kun palvelupaikkoja on $S = 5$ saadaan $B_e = 0,11$ eli 11% kutsuista estyy.

Kun järjestelmään liitetään äärettömän monta odotuspaikkaa saadaan 7 mukaan odottamaan joutuvien osuudeksi $B_w[A, S] = 0,24$ eli 24%. Keskimääräinen odotusaika (9) mukaan on, kun $h = 15$ $E[t_w] = 1,77$ minuuttia eli 1 minuutti 46 sekuntia. Yli 20 minuuttia joutuu odottamaan (8) mukaan keskimäärin $P[t_w > 20] = 0,053$ eli 5,3%.

Mikäli järjestelmässä on rajallinen määrä jonotuspaikkoja on odottavien osuus (10) mukaan $B_w = 0,228$ eli 22,8% ja kokonaan estyvien osuus on (11) mukaan $B_t = 0,0074$ eli 0,74%.

2.2 Tilastollinen kanavoituminen ATM:ssä

ATM-kanavointilaitteeseen on liitetty kuusi tilaajaa, jotka tarjoavat verkkoon toisistaan riippumatonta vaihtelevannopeuksista videokuvaa. Tilaajia on kahdenlaisia (ja heitä on kolme kumpaakin lajia verkossa eli $n_a = n_b = 3$):

1. Lähteen A perusnopeus(λ_{Aperus}) on 15 Mbit/s ja 10% ajasta tarvittava nopeus(λ_{Amax}) on 30 Mbit/s

2. Lähteen B perusnopeus(λ_{Bperus}) on 15 Mbit/s ja 30% ajasta tarvittava nopeus(λ_{Bmax}) on 20 Mbit/s

Väylän tilaajille tarjoama nopeus(λ_{vayla}) on 148,75 Mbit/s

- Mikä on väylän keskimääräinen kuormitus ?
- Millä todennäköisyydellä väylä on ylikuormitustilassa ?
- Kuinka suuri osa väylälle tarjottavista soluista menetetään ?
- Kuinka suuren osa soluistaan menettää tilaaja A ? Entäpä tilaaja B ? Oletetaan , että ylikuormitustilan aikana hylättävät solut valitaan satunnaisesti.

Laske edellä olevat tehtävät, kun tilaajia on 24 ($n_a = n_b = 12$) ja A:n perusnopeus on 3,75 Mbit/s ja huippunopeus 10% ajasta 7,5 Mbit/s sekä B:n perusnopeus on 3,75 Mbit/s ja huippunopeus 30 % ajasta on 5 Mbit/s.

Vertaile kummassakin tapauksessa saamiasi tuloksia. Mistä arvelet ilmiön johtuvan ?

2.2.1 Ratkaisu

- Väylän keskimääräinen kuormitus Kun tilaajat ovat jakautuneet tasan A ja B tyyppisiin tilaajiin ja kun huippunopeus on q_a =10% ja q_b =30% ajasta, väylän kuormitus $\rho = \rho_a + \rho_b = n_a((1-q_a)\lambda_{Aperus} + q_a\lambda_{Amax}) + n_b((1-q_b)\lambda_{Bperus} + q_b\lambda_{Bmax})$.
    1. Kuuden tilaajan tapauksessa kuormitus on likimain 0,67.
    2. 24 tilaajan tapauksessa kuormitus on yhtäsuuri kuin kuuden tilaajan tapauksessa.
- Ylikuormitustilan todennäköisyys
    1. Kuuden tilaajan verkossa ylikuormitustilaa ei esiinny, kun kaikki A-lähteet ja kaksi B-lähdettä lähettävät huippunopeudella ($3 \cdot$

$30 + 2 \cdot 20 + 15 = 145 \leq 148,75$) tai kun kaikki B-lähteet ja kaksi A-lähdettä lähettävät huippunopeudella ($2 \cdot 30 + 20 + 3 \cdot 20 = 135 \leq 148,75$). Näinollen ylikuormitustilanne esiintyy vain, kun kaikki lähteet lähettävät yhtäaikaa huippunopeudella ($\lambda_{max} = 3{\cdot}30{+}3{\cdot}20 = 150 \geq 148,75$). Kuuden tilaajan tapauksessa ylikuormitustilan todennäköisyys $P[ylikuormitus] = {q_a}^3{q_b}^3 = 2,7 \cdot 10^{-5}$.

2. 24 tilaajan verkossa ylikuormitustilaa ei esiinny, kun kaikki A-lähteet ja yksitoista B-lähdettä lähettävät huippunopeudella ($12 \cdot 7,5 + 11 \cdot 5 + 3,75 = 148,75 \leq 148,75$) tai kun kaikki B-lähteet ja yksitoista A-lähdettä lähettävät huippunopeudella ($11 \cdot 7,5 + 3,75 + 12 \cdot 5 = 146,25 \leq 148,75$). Näinollen ylikuormitustilanne esiintyy vain, kun kaikki lähteet lähettävät yhtäaikaa huippunopeudella ($12{\cdot}7,5{+}12{\cdot}5 = 150 \geq 148,75$). 24 tilaajan tapauksessa ylikuormitustilan todennäköisyys $P[ylikuormitus] = {q_a}^{12}{q_b}^{12} = 5,31 \cdot 10^{-19}$

- Solujen menetystodennäköisyys

  Solujen menetystodennäköisyys(B_{loss}) määritellään $B_{loss} = \frac{P[ylikuormitus](\lambda_{max} - \lambda_{vayla})}{\rho\lambda_{vayla}}$.

  1. Kuuden tilaajan tapauksessa solujen menetystodennäköisyys on $3,41 \cdot 10^{-7}$.
  2. 24 tilaajan tapauksessa solujen menetystodennäköisyys on $6,71 \cdot 10^{-21}$.

- Solujen menetykset tilaajittain

  Koska soluja menetetään satunnaisesti eli menetystodennäköisyys ei riipu sen lähteestä, menettävät lähteet soluja huippunopeuksiensa suhteessa. Supistusten jälkeen kummassakin tapauksessa solujen menetystodennäköisyys voidaan laskea allaolevan yhtälöryhmän mukaan:

  $$\begin{cases} 2B_A &= 3B_B \\ \frac{B_A + B_B}{2} &= B_{loss} \end{cases}$$

  1. Kuuden tilaajan tapauksessa A:n menetystodennäköisyys on $\delta_a = 4,09 \cdot 10^{-7}$ ja B:n $\delta_b = 2,73 \cdot 10^{-7}$.
  2. 24 tilaajan tapauksessa A:n menetystodennäköisyys on $\delta_a = 8,05 \cdot 10^{-21}$ ja B:n $\delta_b = 5,37 \cdot 10^{-21}$.

Havaitaan, että vaikka väylän keskimääräinen kuormitus on sama 6 ja 24 tilaajan tapauksissa, 24 tilaajan tapuksessa huomattavasti pienemmät to-

dennäköisyydet ylikuormitustilalle ja solujen menetystodennäköisyyksille. Koska useamman lähteen tapauksessa huippunopeudet ovat pienempiä tasoittuvat ruuhkahuiput paremmin toistensa sekaan. Ilmiötä kutsutaan tilastolliseksi kanavoitumiseksi. Kuva voi selventää tai sekoittaa asiaa lisää.